I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Určete, která číslice je na 1000. místě za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji čísla $\frac{9}{28}$. (*M. Krejčová*)

Nápověda. Jak vypadá desetinný rozvoj uvedeného čísla?

Možné řešení. Desetinný rozvoj racionálního čísla $\frac{9}{28}$ je

$$0,32\overline{142857},$$

kde opakující se část, sestávající ze šesti číslic, je označena pruhem.

Šest se do tisíce vejde 166krát a zbudou čtyři ($1000 = 166 \cdot 6 + 4$). Mezi desetinnou čárkou a opakující se částí jsou dvě číslice. Tedy číslice na 1000. místě za desetinnou čárkou je stejná jako druhá číslice z opakující se části, což je číslice 4.

Poznámka. V řešení je podstatný pouze zbytek po dělení 1000 číslem 6, a ten lze určit bez úplného dělení následovně: Největší číslo dělitelné 6 (tzn. dělitelné 2 a 3), které je menší než 1000, je 996. Zbytek po dělení $1000 : 6$ je $1000 - 996 = 4$.

Z7–I–2

Kuba se domluvil s bačou, že se mu bude starat o ovce. Bača Kubovi slíbil, že po roce služby dostane dvacet zlatých a k tomu jednu ovci. Jenže Kuba dal výpověď, právě když uplynul sedmý měsíc služby. I tak ho Bača spravedlivě odměnil a zaplatil mu pět zlatých a jednu ovci.

Na kolik zlatých si bača cenil jednu ovci? (*L. Hozová*)

Nápověda. Na kolik zlatých si bača cenil Kubovu měsíční práci?

Možné řešení. Kubovi zbývalo do konce roku 5 měsíců a dostal zaplaceno o 15 zlatých méně, než by dostal po celém roce služby. To znamená, že pokud by byl vyplácen pouze v hotovosti, dostával by za každý měsíc 3 zlaté ($15 : 5 = 3$).

Za 7 měsíců měl takto Kuba dostat 21 zlatých ($7 \cdot 3 = 21$). Dostal ale 5 zlatých a jednu ovci, ovce má tedy cenu 16 zlatých ($21 - 5 = 16$).

Jiná nápověda. Jak by mohla vypadat spravedlivá odměna za sedmiletou službu?

Jiné řešení. Máme dva způsoby vyjádření téže odměny:

- 20 zlatých a 1 ovce za 12 měsíců,
- 5 zlatých a 1 ovce za 7 měsíců.

Pokud tato vyjádření převedeme vzhledem ke stejnému časovému úseku, budeme umět určit cenu ovce. Odměnu za sedm let (tj. $7 \cdot 12$ měsíců) služby můžeme vyjádřit dvojím způsobem:

- 140 zlatých a 7 ovcí (tj. sedmkrát první možnost),
- 60 zlatých a 12 ovcí (tj. dvanáctkrát druhá možnost).

V prvním případě je odměna o 80 zlatých větší a o 5 ovcí menší než ve druhém. Tedy 5 ovcí stojí 80 zlatých a jedna ovce stojí 16 zlatých ($80 : 5 = 16$).

Poznámka. Pokud zlaté označíme z a cenu ovce o, potom informace za zadání můžeme zapsat takto:

$$5z + o = \tfrac{7}{12}(20z + o).$$

Odtud lze různými způsoby vyjádřit o pomocí z. Úvahy z předchozího řešení lze shrnout následovně:

$$\begin{aligned} 12(5z + o) &= 7(20z + o),\\ 60z + 12o &= 140z + 7o,\\ 5o &= 80z,\\ o &= 16z. \end{aligned}$$

Ze zadání není předem zřejmé, že cena ovce ve zlatých je celočíselná. S tímto dodatečným předpokladem je možné výsledek nalézt postupným zkoušením možností.

Z7–I–3

Pro skupinu dětí platí, že v každé trojici dětí ze skupiny je chlapec jménem Adam a v každé čtveřici je dívka jménem Beata.

Kolik nejvýše dětí může být v takové skupině a jaká jsou v tom případě jejich jména? *(J. Zhouf)*

Nápověda. Pokud nevíte, jak začít, uvažte konkrétní skupinu dětí a ověřte, zda platí uvedené vlastnosti.

Možné řešení. Jelikož v každé trojici je nějaký chlapec, jsou v celé skupině nejvýše dvě dívky. Jelikož v každé čtveřici je nějaká dívka, jsou v celé skupině nejvýše tři chlapci. Tedy skupina sestávající ze dvou dívek a tří chlapců je největší možná vyhovující skupina.

Jelikož v každé trojici je nějaký Adam, musí se tak jmenovat všichni tři chlapci. Jelikož v každé trojici je nějaká Beata, musí se tak jmenovat obě dívky.

Z7–I–4

Mezi přístavy Mumraj a Zmatek pendlují po stejné trase dvě lodě. V přístavech tráví zanedbatelný čas, hned se otáčí a pokračují v plavbě. Ráno ve stejný okamžik vyplouvá modrá loď z přístavu Mumraj a zelená loď z přístavu Zmatek. Poprvé se lodě míjejí 20 km od přístavu Mumraj a po nějakém čase se potkají přímo v tomto přístavu. To už modrá loď stihla uplout trasu mezi přístavy čtyřikrát, zatímco zelená loď pouze třikrát.

Jak dlouhá je trasa mezi přístavy Mumraj a Zmatek? *(F. Steinhauser)*

Nápověda. Která loď je rychlejší? A kolikrát?

Možné řešení. Lodě vyplouvají ze svých přístavů současně, místo prvního míjení odpovídá jejich rychlostem: poměr ujetých vzdáleností od přístavů je roven poměru rychlostí příslušných lodí.

Poměr rychlostí modré a zelené lodi je $4 : 3$. Ve stejném poměru jsou vzdálenosti od přístavů Mumraj a Zmatek (v tomto pořadí). Vzdálenost od Mumraje je 20 km, tedy vzdálenost od Zmatku je 15 km ($20 : 15 = 4 : 3$).

Trasa mezi přístavy je dlouhá 35 km ($20 + 15 = 35$).

Z7–I–5

Odčítací pyramida je pyramida tvořená nezápornými celými čísly, z nichž každé je rozdílem dvou nejbližších čísel z předchozího patra (čteno odspodu nahoru). Zde je příklad odčítací pyramidy:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & 2 & & 4 & & 5 & \\ 5 & & 7 & & 3 & & 8 \end{array}$$

Význačné číslo je největší číslo odčítací pyramidy. Výtečná pyramida je odčítací pyramida, která má ve vrcholu 0 a alespoň jedno patro tvořené navzájem různými čísly.

1. Kolik nejméně pater musí mít výtečná pyramida?
2. Které nejmenší význačné číslo může být obsaženo ve výtečné pyramidě s nejmenším počtem pater?

(*K. Jasenčáková*)

Nápověda. Jak vypadá patro pod vrcholem?

Možné řešení. Pokud je ve vrcholu 0, musí být v předchozím patře dvě stejná čísla. Každá výtečná pyramida musí mít nejméně tři patra.

Výtečná pyramida s nejmenším počtem pater a s nejmenšími možnými čísly vypadá (až na pořadí čísel na třetím řádku) takto:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

Největší číslo této pyramidy je 2, a to je také odpověď na druhou otázku ze zadání úlohy.

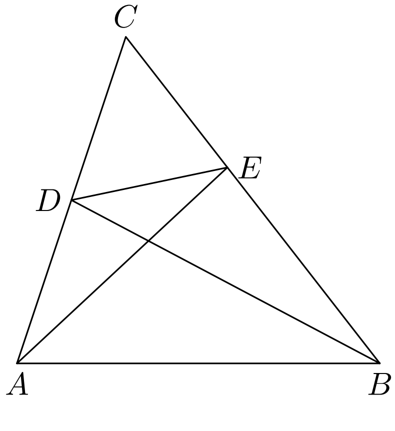
Poznámka. Nejvyšší tři patra odčítací pyramidy s nulou ve vrcholu vypadají (až na pořadí čísel na třetím řádku) takto:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & a & & a & \\ b-a & & b & & b+a \end{array}$$

Z7–I–6

V trojúhelníku ABC leží na straně AC bod D a na straně BC bod E. Velikosti úhlů ABD, BAE, CAE a CBD jsou po řadě $30°$, $60°$, $20°$a $30°$.

Určete velikost úhlu AED.

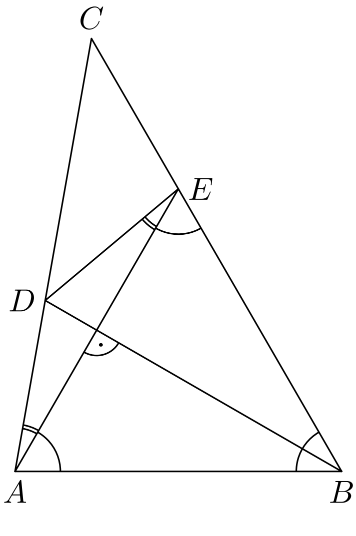


Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. (*A. Bohiniková*)

Nápověda. Hledejte shodné úhly.

Možné řešení. Velikost úhlu ABC je rovna součtu velikostí úhlů ABD a CBD, tj. $30° + 30° = 60°$. V trojúhelníku ABE mají dva vnitřní úhly velikost $60°$, tedy zbylý úhel má také velikost $60°$ a trojúhelník je rovnostranný.

Přímka BD je osou vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníku ABE, tedy je také jeho výškou. Zejména body A a E jsou souměrné podle přímky BD. Úsečky AD a ED, resp. úhly EAD a AED jsou proto shodné. Velikost úhlu AED je rovna $20°$.



Poznámka. Podle údajů ze zadání lze sestrojit trojúhelník ABC včetně bodů D a E. To je vhodný začátek pro odhalení potřebných souvislostí. Řešení založené na měření z obrázku však nelze považovat za vyhovující.

Při této příležitosti připomínáme, že úhel $20°$ (stejně jako mnoho jiných úhlů) nelze sestrojit pouze pomocí pravítka a kružítka.