II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Babička měla čtvercovou zahradu. Dokoupila několik sousedních pozemků, čímž získala zase čtvercový pozemek, jehož strana byla o tři metry delší než strana původní zahrady. Výměra nového pozemku byla o devět čtverečních metrů větší než dvojnásobek původní výměry.

Jak dlouhá byla strana původní zahrady? (*K. Buzáková*)

Možné řešení. Označme a délku strany původní čtvercové zahrady. Po dokupování vznikl nový čtvercový pozemek, jehož strana měla délku $a + 3$. Pro výměry pozemků podle zadání platí

$$(a + 3)^2 = 2a^2 + 9.$$

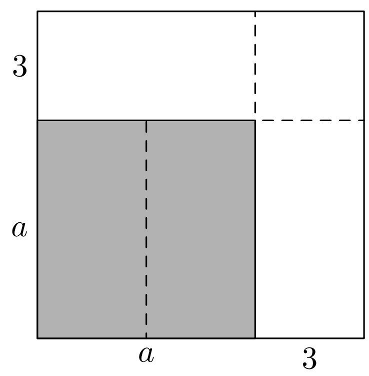
Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} a^2 + 6a + 9 &= 2a^2 + 9, \\ 6a &= a^2, \\ 0 &= a(a - 6). \end{aligned}$$

Uvedená rovnice má dvě řešení: $a = 0$ a $a = 6$.

Původní zahrada měla nenulové rozměry, tedy její strana byla dlouhá šest metrů.

Poznámka. Sice nevíme, jak vypadaly dokoupené pozemky, ale výměry zahrad (a jejich pomocná dělení) můžeme znázornit následovně:



Velký čtverec je složen ze dvou čtverců a dvou shodných obdélníků, resp. z jednoho čtverce a čtyř shodných obdélníků. Takto názorně vyjevujeme výsledek $a = 3 + 3 = 6$.

Hodnocení. 2 body za formulaci podmínek ze zadání pomocí jedné neznámé; 2 body za ekvivalentní úpravy; 2 body za vyloučení nulového řešení a závěr.

Řešení založená na grafickém znázornění hodnoťte podle kvality doprovodného komentáře.

Z9–II–2

Babičce ještě není 100 let, vnučka má více než 10 let a věk babičky je násobkem věku vnučky. Když vnučka napsala věk babičky a za něj věk svůj, dostala čtyřmístné číslo. Když babička napsala věk vnučky a za něj věk svůj, dostala jiné čtyřmístné číslo. Rozdíl těchto dvou čtyřmístných čísel je 7128.

Kolik let může být babičce a kolik vnučce? Uveďte všechny možnosti.

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme v věk vnučky a b věk babičky. Věk babičky je násobkem věku vnučky, tedy $b = kv$ pro nějaké přirozené k.

Čtyřmístné číslo zapsané vnučkou bylo $100b+v$, čtyřmístné číslo napsané babičkou bylo $100v + b$, tedy

$$(100b + v) - (100v + b) = 7128.$$

Po úpravách (a dosazení $b = kv$) dostáváme

$$99(kv - v) = 7128,$$
$$v(k - 1) = 72.$$

Úkolem je najít v a k tak, aby platila předchozí rovnost a navíc $v > 10$ a $b = kv < 100$.

Číslo 72 lze (až na pořadí činitelů) vyjádřit následujícími šesti způsoby:

$$72 = 72 \cdot 1 = 36 \cdot 2 = 24 \cdot 3 = 18 \cdot 4 = 12 \cdot 6 = 9 \cdot 8.$$

Postupně probereme všechny možnosti vyhovující $v > 10$ a určíme odpovídající k a $b = kv$:

v	72	36	**24**	**18**	**12**
k	2	3	4	5	7
b	144	108	**96**	**90**	**84**

Silně jsou vyznačeny vyhovující výsledky, tj. ty, pro něž platí $b < 100$. Úloha má tři řešení.

Jiné řešení. Označme v věk vnučky a b věk babičky, dále $v = \overline{AB}$ a $b = \overline{CD}$ dekadické zápisy těchto čísel. Informaci o rozdílu čtyřmístných čísel ze zadání vyjádříme pomocí algebrogramu

$$\begin{array}{r} C\,D\,A\,B \\ -\,A\,B\,C\,D \\ \hline 7\;1\;2\;8 \end{array}$$

Protože vnučka je mladší než babička, dochází na posledních dvou místech k „přechodu přes desítku“, tj.

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B \\ -\quad C\,D \\ \hline 2\;8 \end{array}$$

Tedy babička je o 72 let starší než vnučka.

Protože vnučka má alespoň 11 let, má babička alespoň 83 let. Protože babička má nejvýše 99 let, má vnučka nejvýše 27 let. V těchto mezích stačí probrat všechny dvojice v a $b = v + 72$ a ověřit, zda b je násobkem v:

v	11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19
b	83	**84**	85	86	87	88	89	**90**	91

v	20	21	22	23	**24**	25	26	27
b	92	93	94	95	**96**	97	98	99

Vyhovující výsledky jsou vyznačeny silně; úloha má tři řešení.

Hodnocení. Po 1 bodě za každé vyhovující řešení; 3 body za úplnost a kvalitu komentáře.

Z9–II–3

Karel, Mirek a Luděk porovnávali své sbírky známek. Když kontrolovali počty, zjistili, že Karel a Mirek mají dohromady 101 známku, Karel a Luděk 115 známek, Mirek a Luděk 110. Když ověřovali, co by mohli měnit, zjistili, že žádnou známku nemají všichni stejnou, ale že Karel a Mirek mají 5 známek stejných, Karel a Luděk 12 stejných, Mirek a Luděk 7.

Kolik známek má Luděk jiných než ostatní chlapci? (*M. Smitková*)

Možné řešení. Označme po řadě K, L a M počty známek, které vlastní Karel, Mirek a Luděk. Podle zadání platí

$$K + M = 101, \quad K + L = 115, \quad M + L = 110.$$

Součtem těchto tří rovností a dalšími úpravami postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} 2K + 2M + 2L &= 326, \\ K + M + L &= 163, \\ L &= 163 - (K + M). \end{aligned}$$

Dosazením první z úvodní trojice rovnic zjišťujeme, že Luděk má celkem 62 známek ($L = 163 - 101 = 62$).

Z těchto 62 známek má 12 stejných jako Karel a 7 stejných jako Mirek. Luděk tedy má 43 známek jiných než ostatní chlapci ($62 - 12 - 7 = 43$).

Jiné řešení. Označme po řadě k, l a m počty známek, které vlastní pouze Karel, pouze Mirek a pouze Luděk. Podle zadání platí

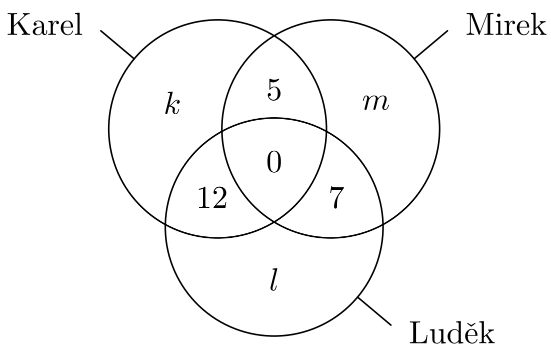
$$\begin{aligned} (k + 5 + 12) + (m + 5 + 7) &= 101, \\ (k + 5 + 12) + (l + 7 + 12) &= 115, \\ (m + 5 + 7) + (l + 7 + 12) &= 110. \end{aligned}$$

Úpravami jednotlivých řádků dostáváme ekvivalentní soustavu

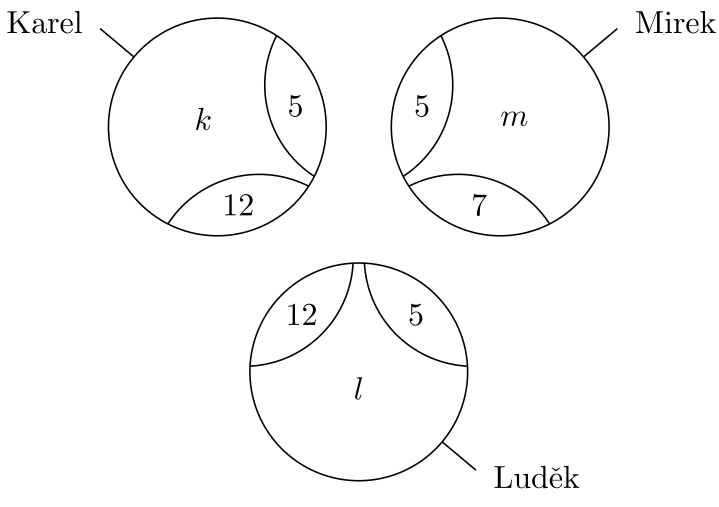
$$\begin{aligned} k + m &= 72, \\ k + l &= 79, \\ m + l &= 79. \end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá, že $k = m$, z první potom $k = m = 36$. Odtud dále dopočítáme $l = 43$. Luděk má 43 známek jiných než ostatní chlapci.

Poznámka. Informace o počtech známek lze znázornit pomocí Vennova diagramu takto:



Při vyjadřování součtů známek se hodnoty z příslušných průniků počítají dvakrát. Přehledněji lze tento poznatek znázornit následovně:



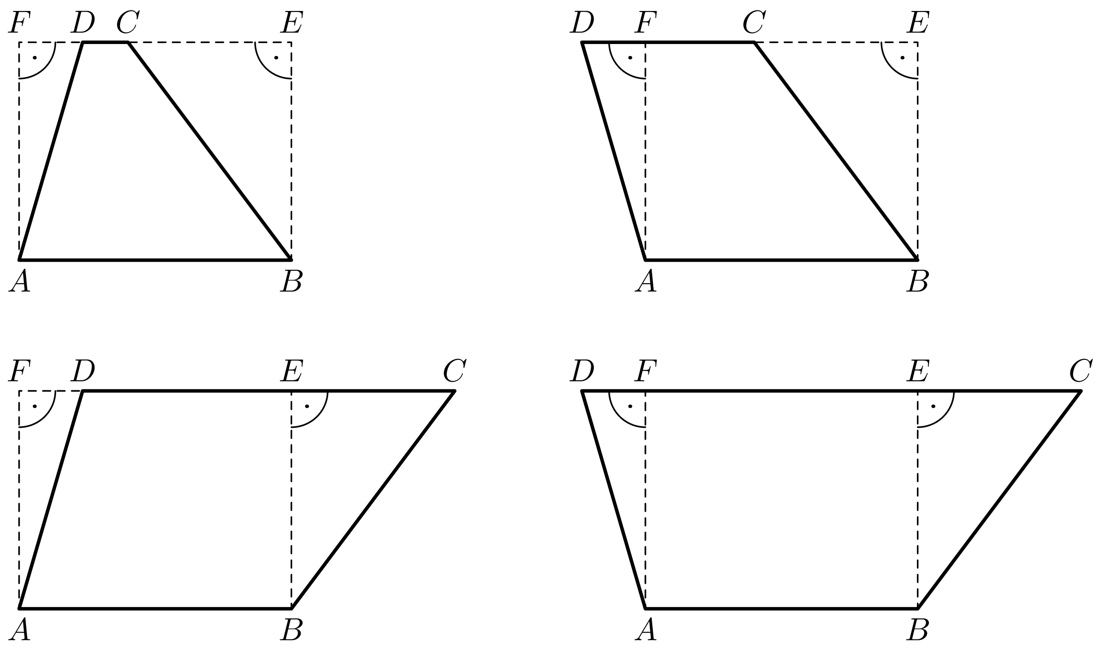
Hodnocení. 3 body za vyjádření informací ze zadání pomocí rovnic a jejich úpravy; 3 body za dořešení soustavy a závěr.

Z9–II–4

Pan učitel chtěl po Adamovi a Evě, aby vypočetli obvod lichoběžníku, jehož delší základna měřila 30 cm, výška 24 cm a ramena 25 cm a 30 cm. Adamovi vyšel jiný obvod než Evě, přece však pan učitel oba pochválil za správná řešení.

Určete výsledky Adama a Evy. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Lichoběžník s danými velikostmi základny (AB), výšky (AF) a ramen (AD a BC) není určen jednoznačně; mohou nastat následující možnosti:



Všechny tyto lichoběžníky chápeme tak, že vznikly z obdélníku $ABEF$ přikládáním, příp. odebíráním pravoúhlých trojúhelníků AFD a BEC. V závislosti na velikostech daných úseček se obecně může stát, že čtyřúhelník $ABCD$ je nekonvexní.† To uvidíme, jakmile dopočítáme neznámé velikosti úseček.

V následujících výpočtech nepíšeme jednotky (všude cm) a dosazujeme hodnoty ze zadání: $|AB| = 30$, $|AF| = 24$, $|AD| = 25$ a $|BC| = 30$. Podle Pythagorovy věty v trojúhelnících AFD a BEC dopočítáme velikosti zbylých odvěsen:

$$|FD| = \sqrt{|AD|^2 - |AF|^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7,$$
$$|EC| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

V prvním, resp. ve druhém případě vychází

$$|CD| = |AB| - |FD| - |EC| = 30 - 7 - 18 = 5,$$
$$|CD| = |AB| + |FD| - |EC| = 30 + 7 - 18 = 19.$$

V obou případech je výsledný rozdíl kladný a menší než 30, tedy se jedná o lichoběžník, jehož delší základna je AB. Ve zbylých dvou případech vychází jako delší základna CD, pročež se těmito případy nemusíme zaobírat.

† Např. v prvním případě by tato situace nastala, pokud by $|AB| < |FD| + |EC|$.

V prvním, resp. ve druhém případě obvod lichoběžníku $|AB|+|BC|+|CD|+|DA|$ vychází

$$30+30+5+25=90, \quad \text{resp.} \quad 30+30+19+25=104,$$

a to jsou výsledky Adama a Evy.

Poznámka. Při ručním počítání velikostí odvěsen FD a EC lze s výhodou využít následujících úprav:

$$\begin{aligned}
\sqrt{25^2-24^2} &= \sqrt{(25-24)(25+24)} = \sqrt{49} = 7,\\
\sqrt{30^2-24^2} &= \sqrt{(30-24)(30+24)} = \sqrt{6\cdot 54} = \sqrt{18\cdot 18} = 18.
\end{aligned}$$

Hodnocení. 2 body za rozbor možností; 2 body za pomocné výpočty; 2 body podle kvality komentáře.