I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Žížala spirálová razí nový tunel: nejprve míří 10 cm na sever, poté 11 cm na východ, poté 12 cm na jih, 13 cm na západ atd. (každý úsek je o 1 cm delší než předchozí, směry opakuje podle uvedeného vzoru). Žížala souřadnicová mapuje dílo svojí kolegyně: začátek tunelu označí souřadnicemi $[0, 0]$, první odbočku souřadnicemi $[0, 10]$, druhou odbočku $[11, 10]$ atd.

Určete souřadnice konce úseku, který má délku 100 cm. (*I. Jančigová*)

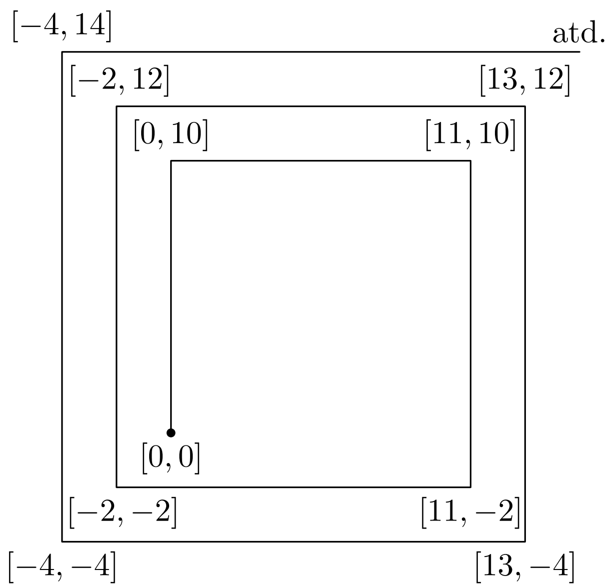
Nápověda. Kterým směrem razila žížala úsek dlouhý 100 cm?

Možné řešení. Délky úseků (v cm) pro jednotlivé směry jsou:

směr	1. kolo	2. kolo	3. kolo	...	k. kolo
sever	10	14	18	...	$6 + 4k$
východ	11	15	19	...	$7 + 4k$
jih	12	16	20	...	$8 + 4k$
západ	13	17	21	...	$9 + 4k$

Úsek dlouhý 100 cm razila žížala ve 23. kole v jižním směru $(8 + 4 \cdot 23 = 100)$.

Souřadnice konců těchto úseků jsou $[11, -2]$, $[13, -4]$, $[15, -6]$, ... První souřadnice se postupně zvětšuje o 2, druhá se zmenšuje o 2.



Obecně v k. kole jsou souřadnice konce úseku v jižním směru $[9 + 2k, -2k]$. Pro $k = 23$ dostáváme $[55, -46]$, a to jsou souřadnice konce metrového úseku.

Z7–I–2

Součin věků všech dětí pana Násobka je 1408. Věk nejmladšího dítěte je roven polovině věku nejstaršího dítěte.

Kolik dětí má pan Násobek a kolik je jim let? (*L. Hozová*)

Nápověda. Jak se lze systematicky vyznat v dělitelích daného čísla?

Možné řešení. Prvočíselný rozklad součinu věků dětí je $1408 = 2^7 \cdot 11$. To znamená, že věk právě jednoho z dětí je násobkem 11 a věky ostatních dětí jsou mocninami 2. Protože věk nejstaršího je dvojnásobkem věku nejmladšího, věk ani jednoho z nich není násobkem 11.

Tedy sourozenci jsou alespoň tři, přičemž nejstaršímu je jistě víc než 11 let. Z úvodního rozkladu zjišťujeme, že nejstaršímu je 16 let, nejmladšímu 8 let a že žádný další sourozenec není:

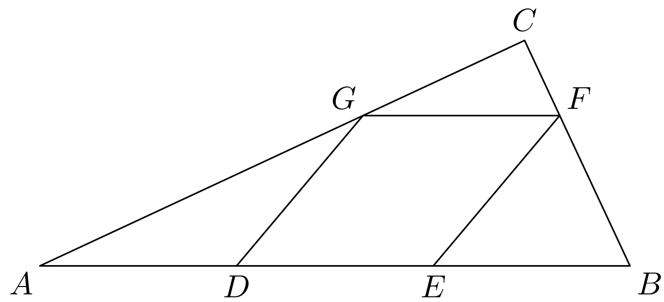
$$1408 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2).$$

Pan Násobek má tři děti staré 8, 11 a 16 let.

Z7–I–3

Na stranách trojúhelníku ABC jsou dány body D, E, F, G, viz obrázek. Přitom platí, že čtyřúhelník $DEFG$ je kosočtverec a úsečky AD, DE a EB jsou navzájem shodné.

Určete velikost úhlu ACB. (*I. Jančigová*)

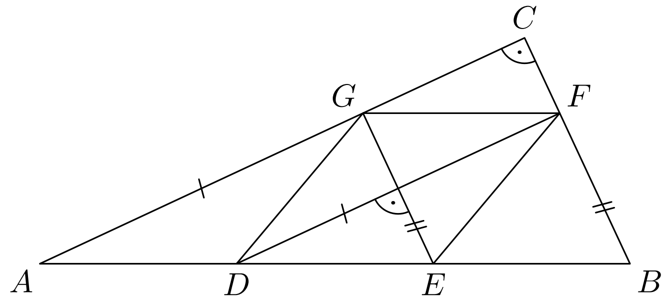


Nápověda. Jaká je vzájemná poloha přímek AC a DF?

Možné řešení. Podle předpokladů jsou úsečky AD a GF rovnoběžné a shodné. Tedy čtyřúhelník $ADFG$ je rovnoběžníkem, zejména přímky AG a DF jsou rovnoběžné.

Obdobnou úvahou lze ukázat, že také přímky BF a EG jsou rovnoběžné.

Jelikož úhlopříčky DF a EG kosočtverce $DEFG$ jsou kolmé, jsou kolmé také přímky AG a BF. Bod C je průsečíkem těchto přímek, tedy úhel ACB je pravý.

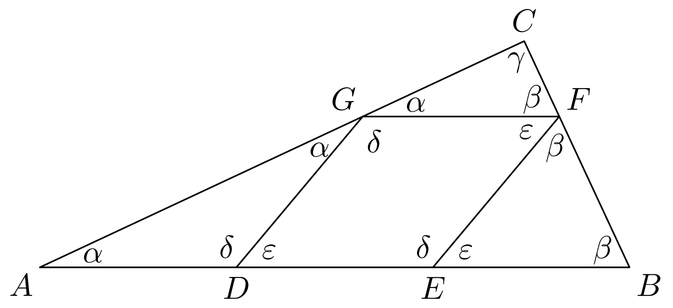


Jiné řešení. Podle předpokladů jsou přímky AB a GF rovnoběžné, tudíž úhly DAG a FGC jsou shodné (souhlasné úhly). Dále trojúhelník ADG je rovnoramenný (AD a DG jsou shodné), tudíž úhly DAG a DGA jsou shodné. Tyto tři navzájem shodné úhly označíme symbolem α, viz obrázek.

Obdobně lze ukázat, že úhly EBC, GFC a EFB jsou navzájem shodné; tyto úhly označíme β.

Z rovnoběžnosti přímek AB a GF také plyne, že úhly ADG a DGF jsou shodné (střídavé úhly). Dále protilehlé úhly v rovnoběžníku $DEFG$ jsou shodné, zejména DGF je shodný s DEF. Tyto tři navzájem shodné úhly označíme symbolem δ.

Obdobně úhly BEF, EFG a EDG jsou navzájem shodné; tyto úhly označíme ε.



Mezi uvedenými úhly platí několik vztahů, z nichž vybíráme:

- $\varepsilon = 2\alpha$ (vnější úhel trojúhelníku ADG),
- $\varepsilon + 2\beta = 180°$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku EBF),
- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (součet vnitřních úhlů trojúhelníku GFC).

Z prvních dvou rovností vyplývá, že $2\alpha + 2\beta = 180°$, tedy $\alpha + \beta = 90°$. Dosazením do třetí rovnosti dostáváme $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90°$. Tedy úhel ACB je pravý.

Z7–I–4

Pepík vymyslel následující úlohu:

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U = ?$$

Různá písmena nahrazoval různými číslicemi od 1 do 9 a zjišťoval, co vychází.

a) Jaký největší výsledek mohl Pepík dostat?
b) Mohl dostat výsledek 50? Pokud ano, jak?
c) Mohl dostat výsledek 59? Pokud ano, určete jaké všechny hodnoty mohl mít součet $M + A + M$.

(*M. Smitková*)

Nápověda. Kolikrát se která písmena opakují?

Možné řešení. Písmena M a A jsou v Pepíkově úloze zastoupena čtyřikrát, T dvakrát, ostatní písmena po jednom. Při jakémkoli nahrazení číslic za písmena je součet navzájem různých číslic roven $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Uvedenou úlohu tedy můžeme zjednodušeně zapsat jako

$$3M + 3A + T + 45 = ?$$

(Záměna M a A nemá vliv na celkový součet a tyto možnosti v dalším nerozlišujeme.)

a) Má-li být součet největší možný, musíme nejčetnější písmena nahrazovat co možná největšími číslicemi. Takto pro $M = 9$, $A = 8$ a $T = 7$ dostáváme

$$3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 7 + 45 = 103.$$

b) Součet 50 není možný, neboť nahrazení s nejmenším možným součtem je $M = 1$, $A = 2$ a $T = 3$, a to dává

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 + 45 = 57.$$

c) Má-li být součet 59, musí být $3M + 3A + T = 14$ neboli $3(M + A) = 14 - T$. Nahrazení za T musí být takové, aby rozdíl $14 - T$ byl dělitelný třemi. Mezi čísly od 1 do 9 máme následující tři možnosti:

   - Pro $T = 2$ vychází $M + A = 4$. Tedy může být buď $M = 1$ a $A = 3$, nebo $M = 3$ a $A = 1$. Hledaný součet $M + A + M$ je buď 5, nebo 7.
   - Pro $T = 5$ vychází $M + A = 3$. Tedy může být buď $M = 1$ a $A = 2$, nebo $M = 2$ a $A = 1$. Hledaný součet $M + A + M$ je buď 4, nebo 5.
   - Pro $T = 8$ vychází $M + A = 2$. Pro tuto hodnotu nelze M a A nahradit navzájem různými číslicemi.

   Celkový součet 59 je možný; dílčí součet $M + A + M$ může být 4, 5, nebo 7.

Z7–I–5

Honza vyrazil do světa s rancem buchet. Na prvním rozcestí potkal Dlouhého, Širokého a Bystrozrakého a spravedlivě se s nimi o své buchty rozdělil — každý dostal čtvrtinu buchet. Honza ze svého dílu ujedl dvě buchty a vyrazil dál.

Na druhém rozcestí potkal Jeníčka a Mařenku a i s nimi se spravedlivě rozdělil — každý dostal třetinu zbylých buchet. Honza ze svého dílu snědl zase dvě buchty a se zbylými vyrazil dál.

Na třetím rozcestí potkal Sněhurku. I s tou se spravedlivě rozdělil, takže oba měli polovinu zbylých buchet. Když Honza snědl opět svoje dvě buchty, byl ranec prázdný, a tak se vrátil domů.

S kolika buchtami vyrazil Honza do světa? (*M. Petrová*)

Nápověda. S kolika buchtami přišel Honza na třetí rozcestí?

Možné řešení. Úlohu můžeme s výhodou řešit odzadu:

- Na třetím rozcestí Honza snědl poslední 2 buchty, což byla polovina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na třetí rozcestí tedy přišel se 4 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z rozcestí druhého.
- Na druhém rozcestí snědl 2 buchty (a pak vyrazil dál). Před tím jich tedy měl 6, což byla třetina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na druhé rozcestí tedy přišel s 18 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z rozcestí prvního.
- Na prvním rozcestí snědl 2 buchty (a pak vyrazil dál). Před tím jich tedy měl 20, což byla čtvrtina z toho, co na toto rozcestí přinesl. Na první rozcestí tedy přišel s 80 buchtami, a to je také počet, se kterým odcházel z domova.

Honza vyrazil do světa s 80 buchtami.

Poznámka. Předchozí úvahy jsou zhutněny v následující tabulce:

rozcestí	zbylo	přinesl
3	0	$2 \cdot 2 = 4$
2	4	$(4 + 2) \cdot 3 = 18$
1	18	$(18 + 2) \cdot 4 = 80$

Z7–I–6

Pan Chrt měl ve svém psím spřežení pět psů — Alíka, Broka, Muka, Rafa a Punťu. Přemýšlel, jak by mohl psy zapřáhnout do řady za sebe tak, aby Alík byl před Punťou.

Kolika způsoby to mohl pan Chrt udělat? (*L. Hozová*)

Nápověda. Na jakých místech mohli být zapřaženi Alík a Punťa?

Možné řešení. Pokud by byl Alík první, Punťa by mohl být druhý, třetí, čtvrtý, nebo pátý:

$$A\,P * * * \quad A * P * * \quad A * * P * \quad A * * * P$$

Pokud by byl Alík druhý, Punťa by mohl být třetí, čtvrtý, nebo pátý:

$$* A\,P * * \quad * A * P * \quad * A * * P$$

Pokud by byl Alík třetí, Punťa by mohl být čtvrtý, nebo pátý:

$$* * A\,P * \quad * * A * P$$

Pokud by byl Alík čtvrtý, Punťa by musel být pátý:

$$* * * A\,P$$

Tedy pan Chrt měl 10 možností, jak zapřáhnout Alíka a Punťu požadovaným způsobem.

V každém z těchto případů mohli být zbylí tři psové zapřaženi na neobsazená místa (označená $*$) libovolně. A to lze provést 6 způsoby: jeden pes může na kterékoli ze tří volných míst, druhý pes na kterékoli ze dvou zbývajících míst, třetí pes nemá na vybranou a musí na poslední volné místo (tedy $6 = 3 \cdot 2$).

Pan Chrt mohl svoje psy zapřáhnout celkem 60 způsoby (neboť $10 \cdot 6 = 60$).

Poznámka. Předchozí počítání všech možných pořadí tří prvků lze zobecnit pro libovolný počet; výslednému číslu se říká *faktoriál* a značí se vykřičníkem (zde $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$).

Všech pět psů pana Chrta lze zapřáhnout celkem $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ způsoby. Přitom v polovině případů stojí Alík před Punťou a v polovině případů je tomu naopak (stačí zaměnit tyto dva psy a ostatní nechat na svých místech). Tedy Alík před Punťou může být v 60 případech.