I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Adam, Bořek a Čenda porovnávali, kolik kg kaštanů nasbírali. Zjistili, že aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Bořkem, je o 10 kg větší než Čendův příspěvek. A aritmetický průměr toho, co nasbíral Adam s Čendou, je o 3 kg menší než Bořkův příspěvek.

Určete rozdíl mezi aritmetickým průměrem toho, co nasbíral Bořek s Čendou, a Adamovým příspěvkem. (*M. Petrová*)

Nápověda. Vyjádřete vztahy ze zadání pomocí neznámých.

Možné řešení. Množství kaštanů (v kg) nasbírané Adamem, Bořkem a Čendou označíme po řadě a, b a c. Podle zadání platí

$$\frac{a+b}{2} = c + 10, \qquad \frac{a+c}{2} = b - 3.$$

Chceme určit rozdíl mezi $\frac{b+c}{2}$ a a. K tomu stačí předchozí dvě rovnice sečíst a upravit:

$$a + \frac{b+c}{2} = b + c + 7,$$
$$a - 7 = \frac{b+c}{2}.$$

Adamův příspěvek je o 7 kg větší než aritmetický průměr toho, co nasbíral Bořek s Čendou.

Poznámky. Pokud bychom hledaný rozdíl označili x a k úvodním dvěma rovnicím přidali $\frac{b+c}{2} = a - x$, potom součet všech tří rovnic (a jednoduchá úprava) dává $x = 7$.

Úvodní dvojice rovnic je ekvivalentní dvojici

$$a + b - 2c = 20, \qquad a - 2b + c = -6.$$

Odtud lze vyjádřit dvě z neznámých pomocí třetí, a to např. takto

$$b = \frac{26}{3} + c, \qquad a = \frac{34}{3} + c. \tag{$*$}$$

Hledaný rozdíl potom vychází

$$a - \frac{b+c}{2} = \frac{34}{3} + c - \frac{26}{6} - c = \frac{21}{3} = 7.$$

Bez dodatečné informace nelze určit, kolik jednotliví chlapci nasbírali (méně rovnic než neznámých). Z předchozího postupu je však patrné, že úloha je realizovatelná: ať už Čenda nasbíral cokoli, je c nezáporné, a z vyjádření ($*$) vyplývá, že příspěvky ostatních chlapců a a b jsou též nezáporné.

Z9–I–2

Jana si vymyslela 2022místné číslo a jeho ciferný součet pošeptala Petrovi. Petr vypočítal ciferný součet čísla, které mu sdělila Jana, a výsledek pošeptal Zuzce. Zuzka též vypočítala ciferný součet čísla, které dostala od Petra, a výsledek, jímž bylo dvojmístné číslo, pošeptala Adamovi. Adam provedl totéž s číslem od Zuzky a vyšel mu ciferný součet 1.

Která čísla mohl šeptat Petr Zuzce? Určete všechny možnosti. (*I. Jančigová*)

Nápověda. Jaký největší ciferný součet může mít 2022místné číslo?

Možné řešení. Ciferný součet 2022místného čísla může být nanejvýš $2022 \cdot 9 = 18198$ (tj. pro číslo tvořené samými devítkami). To je zároveň největší číslo, které mohla pošeptat Jana Petrovi.

Ciferný součet čísla, které je menší nebo rovno 18198, může být nanejvýš 36 (pro číslo 9999). To je zároveň největší číslo, které mohl pošeptat Petr Zuzce.

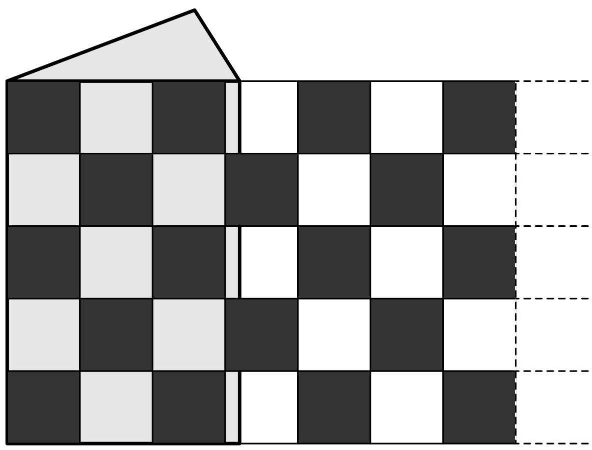
Avšak Zuzka Adamovi pošeptala dvojmístné číslo s ciferným součtem 1, tj. jedině číslo 10. Petr Zuzce tedy pošeptal číslo menší nebo rovno 36 s ciferným součtem 10, tj. buď 19, nebo 28.

Poznámka. Ciferné součty mohou být v daných mezích jakékoliv, tedy jistě existují 2022místná čísla vyhovující všem uvedeným informacím. Např. číslo tvořené jednou jedničkou, 22 devítkami a ostatními číslicemi nulovými má ciferný součet $1+22\cdot 9 = 199$, to má ciferný součet 19 atd.

Z9–I–3

Je dán pravidelný trojboký hranol s podstavnou hranou délky 3,2 cm a výškou 5 cm. Jeho plášť omotáváme šachovnicovou fólií, která sestává z neprůhledných a průhledných čtvercových polí se stranami délky 1 cm. Začátek fólie lícuje s hranou hranolu (viz obrázek) a délka fólie vystačí právě na dvojí omotání celého pláště.

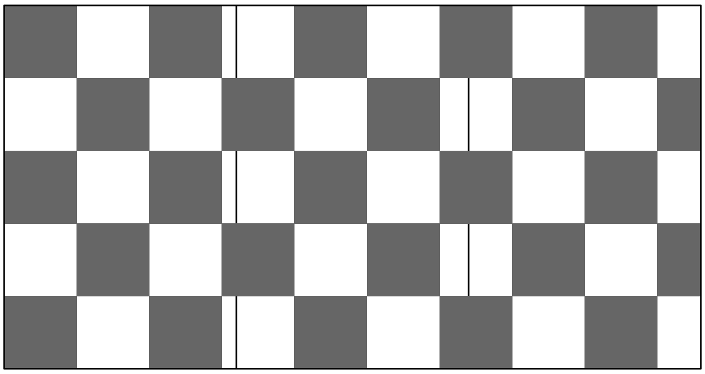
Kolik procent pláště hranolu bude přes fólii po omotání vidět? Tloušťku fólie zanedbejte. (*K. Pazourek*)



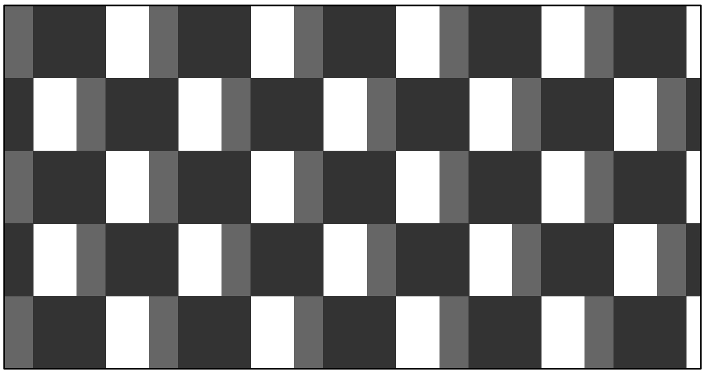
Nápověda. Kolik jakých polí je na plášti po prvním omotání fólie?

Možné řešení. Plášť hranolu tvoří tři shodné obdélníky s rozměry 3,2 cm × 5 cm, rozvinutý plášť je obdélník s rozměry 9,6 cm × 5 cm, obsah pláště je $48\,\mathrm{cm}^2$.

Po prvním omotání vypadá rozvinutý plášť následovně (pro rozlišení vrstev používáme různé odstíny šedé):



Na délce 9,6 cm vychází pole šachovnice následovně: 22 průhledných polí jsou celé čtverce, 3 průhledná pole jsou obdélníky se šířkou 0,6 cm (a výškou 1 cm). O chybějící 0,4 cm je fólie posunuta při druhém omotání:



Všechna průhledná pole jsou tak zmenšena o 0,4 cm své šířky. Celkem po dvojím omotání je průhledná část tvořena 22 obdélníky s rozměry 0,6 cm × 1 cm a 3 obdélníky s rozměry 0,2 cm × 1 cm. Přes fólii je tedy vidět 13,8 cm^2 pláště hranolu ($22 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot$ $\cdot\, 0{,}2 = 13{,}8$), což z celkového obsahu 48 cm^2 představuje 28,75 % ($13{,}8 : 48 = 0{,}2875$).

Z9–I–4

Deltoid je konvexní čtyřúhelník s jedinou osou souměrnosti. Deltoid $ABCD$ je souměrný podle úhlopříčky AC se stranou AB délky 5 cm, se stranou BC délky 3 cm a s úhlem BCD velikosti 60°. Bod E je patou kolmice z vrcholu B na stranu AD a F je patou kolmice z vrcholu D na stranu BC.

Určete obvod a obsah čtyřúhelníku $DEBF$. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Rozdělte útvary na části podle úhlopříčky BD.

Možné řešení. Z osové souměrnosti deltoidu plyne, že trojúhelníky BCD a BAD jsou rovnoramenné. Trojúhelník BCD je navíc rovnostranný, neboť úhel BCD má velikost 60°. Tedy pata výšky z vrcholu D je středem úsečky BC a velikosti dvou ze čtyř stran čtyřúhelníku $DEBF$ jsou

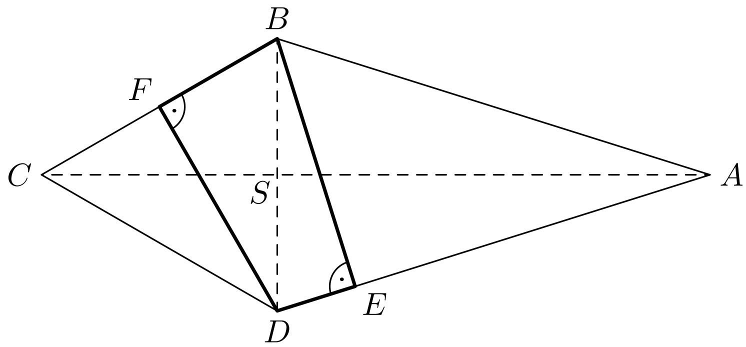
$$|BF| = \frac{3}{2}\,\text{cm}, \quad |FD| = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}.$$

Úhlopříčky deltoidu jsou navzájem kolmé, jejich průsečík označíme S. Trojúhelník BED je podobný trojúhelníku ASD, neboť oba jsou pravoúhlé a mají společný úhel u vrcholu D. Odtud lze porovnáním vhodných stran vyjádřit velikost úsečky DE; z rovností $|DE| : |DB| = |DS| : |DA|$ a $|DS| = \frac{1}{2}|DB|$ dostáváme

$$|DE| = \frac{|DB|^2}{2|DA|} = \frac{9}{10}\,(\mathrm{cm}).$$

Z Pythagorovy věty v trojúhelníku BED umíme vyjádřit velikost poslední strany čtyřúhelníku $DEBF$:

$$|BE| = \sqrt{|BD|^2 - |DE|^2} = \sqrt{\frac{819}{100}} = \frac{3\sqrt{91}}{10}\,(\mathrm{cm}).$$



Obvod čtyřúhelníku $DEBF$ je roven

$$|BF| + |FD| + |DE| + |EB| = \frac{24}{10} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{91}}{10} \doteq 7{,}86\,(\mathrm{cm}).$$

Obsah čtyřúhelníku $DEBF$ je roven

$$\frac{1}{2}\big(|BF| \cdot |FD| + |DE| \cdot |EB|\big) = \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{27\sqrt{91}}{200} \doteq 3{,}24\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámky. Ve vyjádření velikosti FD odkazujeme na dobře známý vzoreček pro výšku rovnostranného trojúhelníku (který je odvozen z Pythagorovy věty v trojúhelníku BFD).

Velikost BE lze odvodit z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku ABD, přesněji z rovnosti $|BE| \cdot |AD| = |AS| \cdot |BD|$, kde $|AS| = \frac{\sqrt{91}}{2}$ cm je vypočteno z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABS.

Z9–I–5

Vodník Kebule nakupoval v rybárně kapitána Nema, kde ceny všeho zboží byly uvedeny v celých šupinkách. Kdyby Kebule koupil 2 raky, 3 škeble a 1 štiku, zaplatil by 49 šupinek. Pokud by přikoupil ještě 5 raků, 11 škeblí a 1 štiku, platil by celkem 154 šupinek.

Kolik šupinek by platil za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky? Určete všechny možnosti. (*K. Pazourek*)

Nápověda. Vyjádřete vztahy ze zadání pomocí neznámých.

Možné řešení. Označme po řadě r, k a t počet šupinek, které stojí jeden rak, jedna škeble a jedna štika. Informace o prvním uvažovaném nákupu znamená

$$2r + 3k + t = 49. \tag{1}$$

Za přikoupené zboží by Kebule doplácel $154 - 49 = 105$ šupinek, tedy

$$5r + 11k + t = 105. \tag{2}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostáváme

$$3r + 8k = 56.$$

Neznámé r a k jsou celá čísla a

$$k = 7 - \frac{3}{8}r, \tag{3}$$

proto r musí být dělitelné osmi. Neznámé r a k jsou navíc kladná čísla, tedy r může být buď 8, nebo 16.

Pro $r = 8$ a 16 umíme vyjádřit k podle (3) a t pomocí (1), resp. (2). Pokud také t vyjde kladné, dopočítáme hledanou cenu za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky:

r	k	t	$r + 2k + 3t$
8	4	21	79
16	1	14	60

Kebule by za 1 raka, 2 škeble a 3 štiky mohl platit buď 79, nebo 60 šupinek.

Poznámka. Dělitelnost čísla r osmi znamená, že $r = 8r'$, kde r' je nějaké celé číslo. Odtud podle (3) vychází $k = 7 - 3r'$ a pomocí (1), resp. (2) dostáváme $t = 28 - 7r'$. Hledaný součet je pak roven $r + 2k + 3t = 98 - 19r'$ a sloupce v předchozí tabulce odpovídají

$8r'$	$7 - 3r'$	$28 - 7r'$	$98 - 19r'$

Všechna čísla jsou kladná, právě když r' je buď 1, nebo 2, což souhlasí s výše uvedenými omezeními.

Z9–I–6

Jsou dána dvě různá čísla. Pokud od každého čísla odečteme čtvrtinu menšího čísla, dostaneme čísla, z nichž jedno bude pětkrát větší než druhé.

Kolikrát je dané větší číslo větší než to menší? (*L. Hozová*)

Nápověda. Hrají nějakou roli znaménka uvažovaných čísel?

Možné řešení. Daná čísla označíme m a v, přičemž $m < v$. Uvedená relace se nezmění, pokud od obou čísel odečteme (jakékoli) stejné číslo. Zejména platí

$$\frac{3}{4}m < v - \frac{1}{4}m.$$

Aby jedno z čísel v předchozí nerovnosti bylo pětinásobkem druhého, musí mít obě stejná znaménka:

- Pokud jsou obě čísla kladná, potom

$$5 \cdot \frac{3}{4}m = v - \frac{1}{4}m.$$

  Odtud dostáváme $v = \frac{16}{4}m = 4m$.
- Pokud jsou obě čísla záporná, potom

$$\frac{3}{4}m = 5 \cdot (v - \frac{1}{4}m).$$

  Odtud dostáváme $5v = \frac{8}{4}m$, tedy $v = \frac{2}{5}m$.

Vztah mezi danými čísly je buď $v = 4m$, nebo $v = \frac{2}{5}m$.

Poznámka. Z uvedeného mj. plyne, že daná čísla mají stejná znaménka.