71. ročník Matematické olympiády (2021/22)

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Na tabuli byl zadán příklad na dělení dvou kladných čísel. David si všiml, že pokud by dělenec zvětšil o dva a dělitel o sedm, podíl by se nezměnil.

O kolik by se musel zvětšit dělitel, aby při zvětšení dělence o tři vyšel opět stejný podíl? (*M. Petrová*)

Z8–II–2

Po oslavě odložila maminka poslední kousek dortu pro tetu. Když teta konečně dorazila, našla místo pochoutky jen špinavý talíř. Maminka zjišťovala, co se stalo, a od svých čtyř dětí dostala následující odpovědi:

Adam: „Snědla to Blanka nebo Cyril.“
Blanka: „Snědl to Adam nebo Cyril.“
Cyril: „Nikdo z nás nelže.“
Dana: „Všichni kromě mě lžou.“

Nakonec se ukázalo, že dort dojedlo jedno z dětí a že toto dítě mluvilo pravdu.
Zjistěte, které dítě to bylo. (*E. Novotná*)

Z8–II–3

Petr narýsoval lichoběžník $ABCD$, jehož základna AB byla dvakrát delší než základna CD a strany AD, DC, CB byly navzájem shodné. Poté dorýsoval čtverec, který měl jednu stranu společnou s kratší základnou lichoběžníku. Nový vrchol čtverce, který byl blíž k B než k A, označil N.

Jaká mohla být velikost úhlu ABN? Určete všechny možnosti. (*A. Bohiniková*)

Okresní kolo kategorie Z8 se koná **12. dubna 2022** tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 2 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 9 a více bodů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní matematické tabulky. Kalkulátory a jiné elektronické pomůcky povoleny nejsou.

Řeší-li žák okresní kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 2 hodin a 20 minut po začátku soutěže, nejpozději však ve 12:20. Aby mohly být uznány číselné výsledky, musí odevzdané řešení obsahovat pomocné výpočty.

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Na tabuli byl zadán příklad na dělení dvou kladných čísel. David si všiml, že pokud by dělenec zvětšil o dva a dělitel o sedm, podíl by se nezměnil.

O kolik by se musel zvětšit dělitel, aby při zvětšení dělence o tři vyšel opět stejný podíl? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pokud původní dělenec označíme n a původní dělitel t, potom podmínka ze zadání znamená

$$\frac{n}{t} = \frac{n+2}{t+7}. \tag{1}$$

Úpravami založenými na porovnávání zlomků dostáváme:

$$nt + 7n = nt + 2t,$$
$$\frac{n}{t} = \frac{2}{7}.$$

Otázka v zadání se ptá, pro které číslo z platí

$$\frac{2}{7} = \frac{2+3}{7+z}. \tag{2}$$

Úpravami dostáváme následující odpověď:

$$14 + 2z = 14 + 21,$$
$$2z = 21,$$
$$z = \frac{21}{2}.$$

Dělitel se musí zvětšit o $\frac{21}{2} = 10{,}5$.

Hodnocení. 2 body za pomocné úvahy a úpravy; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámky. I bez uvedených úprav lze úvahou přijít na to, že rovnost (1) platí právě pro dvojice tvaru $n = 2k$ a $t = 7k$, kde k je libovolné kladné číslo. Tato libovůle nehraje v dalším žádnou roli (k se vykrátí).

Místo rovnosti (2) lze obecně uvažovat

$$\frac{n}{t} = \frac{n+3}{t+z}$$

a obdobným způsobem jako výše odvodit, že $\frac{n}{t} = \frac{3}{z}$. To spolu s předchozí podmínkou $\frac{n}{t} = \frac{2}{7}$ dává $\frac{3}{z} = \frac{2}{7}$, odkud vyplývá $z = \frac{21}{2}$.

Z8–II–2

Po oslavě odložila maminka poslední kousek dortu pro tetu. Když teta konečně dorazila, našla místo pochoutky jen špinavý talíř. Maminka zjišťovala, co se stalo, a od svých čtyř dětí dostala následující odpovědi:

Adam: „Snědla to Blanka nebo Cyril.“
Blanka: „Snědl to Adam nebo Cyril.“
Cyril: „Nikdo z nás nelže.“
Dana: „Všichni kromě mě lžou.“

Nakonec se ukázalo, že dort dojedlo jedno z dětí a že toto dítě mluvilo pravdu.

Zjistěte, které dítě to bylo. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Dítě, které dort dojedlo, mluvilo pravdu.

Dort nemohli dojíst ani Adam, ani Blanka — to by pak nemohli tvrdit, že to udělal někdo jiný.

Kdyby dort dojedl Cyril, potom by podle jeho vyjádření mluvili pravdu všichni, tedy i Dana. Dana ale tvrdí, že Cyril (stejně jako Adam a Blanka) lže, což je neslučitelné — Cyril nemůže současně lhát a mluvit pravdu.

Dort tedy dojedla Dana — podle jejího vyjádření ostatní děti lhaly, a to vskutku nevede k žádnému rozporu jako v předchozích případech.

Hodnocení. 2 body za vyloučení některých možností (vedoucích ke sporu); 2 body za podezření Dany (žádný spor); 2 body za úplnost a kvalitu komentáře.

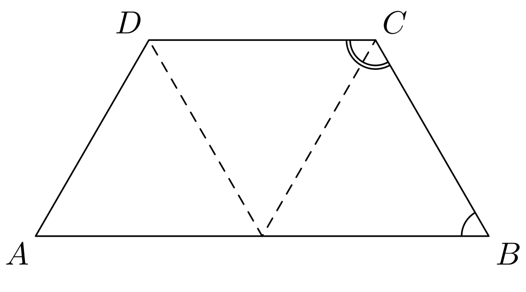
Poznámka. Uvědomte si, že pracujeme pouze s implikací „dítě snědlo dort, tedy mluvilo pravdu“. Tu lze nahradit např. „dítě lhalo, tedy nesnědlo dort“, zatímco úvahy typu „dítě nesnědlo dort, tedy lhalo“ nejsou správné.

Z8–II–3

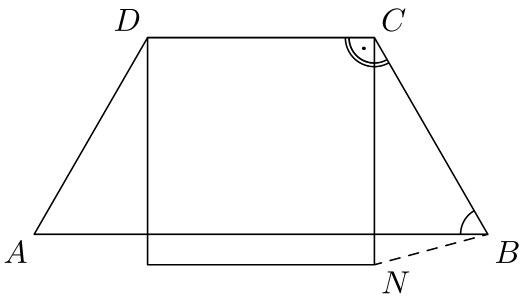
Petr narýsoval lichoběžník $ABCD$, jehož základna AB byla dvakrát delší než základna CD a strany AD, DC, CB byly navzájem shodné. Poté dorýsoval čtverec, který měl jednu stranu společnou s kratší základnou lichoběžníku. Nový vrchol čtverce, který byl blíž k B než k A, označil N.

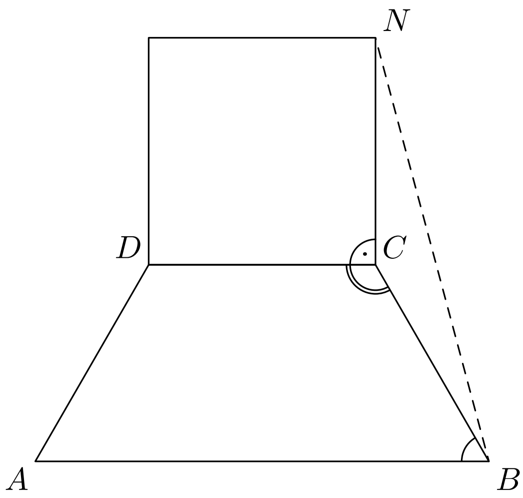
Jaká mohla být velikost úhlu ABN? Určete všechny možnosti. (*A. Bohiniková*)

Možné řešení. Podle předpokladů ze zadání lze lichoběžník $ABCD$ rozložit na tři rovnostranné trojúhelníky. Tedy vnitřní úhel u vrcholu B je 60°a u vrcholu C je 120°.



Podle toho, ve které polorovině omezené přímkou CD byly zbylé vrcholy Petrova čtverce, rozlišujeme dva případy:





V obou případech je trojúhelník BCN rovnoramenný, se shodnými rameny BC, CN a shodnými úhly u základny BN. Relevantní úhly vychází následovně:

- V prvním případě je úhel BCN roven $30°(120 - 90 = 30)$, tedy úhel CBN je $75°(30 + 2 \cdot 75 = 180)$ a úhel ABN je $15°(75 - 60 = 15)$.
- Ve druhém případě je úhel BCN roven $150°(360 - 120 - 90 = 150)$, tedy úhel CBN je $15°(150 + 2 \cdot 15 = 180)$ a úhel ABN je $75°(15 + 60 = 75)$.

  Velikost úhlu ABN mohla být buď $15°$, nebo $75°$.

Hodnocení. 1 bod za vnitřní úhly lichoběžníku $ABCD$; 2 body za další postřehy a mezivýsledky; 3 body za dořešení a kvalitu komentáře. Řešení zahrnující jen jednu možnost hodnoťte nejvýše 4 body.