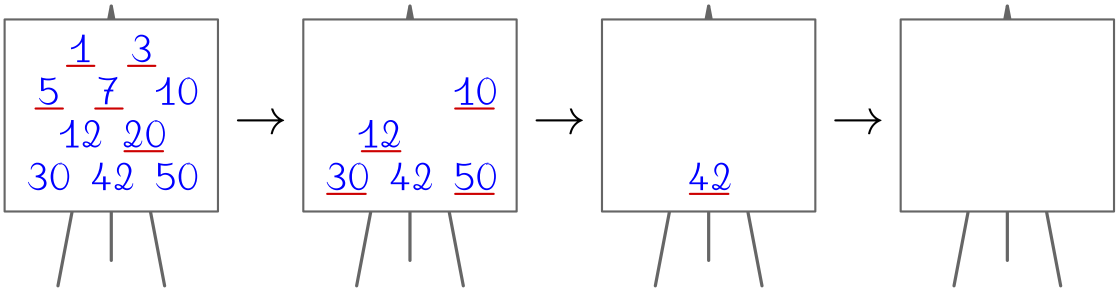
Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:*



a) *Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.*

b) *Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.*

(Patrik Bak)

Řešení. a) Všechna čísla na tabuli jsou podle zadání kladná a různá. V každém kroku proto jistě podtrhneme nejmenší číslo na tabuli, a – pokud není na tabuli jediné – také druhé nejmenší číslo, neboť ani ono se nemůže rovnat součtu dvou různých čísel na tabuli. Protože v každém kroku tak nějaké číslo smažeme, po konečném počtu kroků bude tabule prázdná, jak jsme měli dokázat.

b) Nejdříve poznamenejme, že tabule zůstane prázdná po nejvýše 5 krocích. To je podle části a) zřejmé, pokud v žádném kroku nebude smazáno pouze jedno číslo. Krok s jedním smazaným číslem ovšem může být pouze jeden, totiž ten poslední; předchozích kroků tehdy ovšem nemůže být více než 4.

Nyní uvedeme příklad deseti výchozích čísel, pro která tabule po čtvrtém kroku ještě prázdná nebude. To jistě nastane, pokud v každém ze čtyř kroků budou smazána jen dvě čísla (ta nejmenší).* K tomu musí být každé větší číslo (tj. od třetího nejmenšího) vždy rovno součtu dvou různých (menších) čísel, která se na tabuli dosud nacházejí. To nás motivuje uvážit řadu přirozených čísel, ve které *každé následující číslo je rovno součtu dvou předchozích čísel*. Zvolíme-li například za první dvě čísla 1 a 2, bude třetí číslo $1 + 2 = 3$, čtvrté $2 + 3 = 5$, atd. Vypišme prvních deset těchto čísel (která se nazývají *Fibonacciova* a hrají významnou roli v různých oblastech matematiky i jejích aplikacích):

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.$$

* V jednom z nich by mohla být smazána i tři čísla, ale tuto možnost při naší konstrukci pomineme.

Budou-li na začátku právě tato čísla napsána na tabuli, pak v každém ze čtyř kroků zřejmě smažeme pouze dvě čísla. Potvrďme to i zápisem těchto kroků:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89) \to (\underline{3}, \underline{5}, 8, 13, 21, 34, 55, 89) \to$$
$$\to (\underline{8}, \underline{13}, 21, 34, 55, 89) \to (\underline{21}, \underline{34}, 55, 89) \to (\underline{55}, \underline{89}).$$

Tím máme vyřešenu i část b): Hledaný největší počet kroků je roven 4.

Návodné a doplňující úlohy:

Budeme se zabývat pouze námětem ze soutěžní úlohy.

N1. Po kolika krocích bude tabule prázdná, pokud je na ní na začátku napsána pětice nejmenších přirozených čísel? [Po dvou krocích. V prvním kroku smažeme čísla 1 a 2, v druhém kroku zbylá čísla 3, 4, 5.]

N2. Kolik nejméně přirozených čísel může být na tabuli napsáno, pokud chceme, aby tabule zůstala prázdná až po dvou krocích? [Budou-li na tabuli nejvýše dvě čísla, bude tabule zřejmě prázdná hned po prvním kroku. Tři napsaná čísla někdy ke dvěma krokům vedou – obecně je to trojice (a, b, c), kde $c = a + b$. Podrobněji: Chceme-li, aby tabule po prvním kroku ještě nebyla prázdná, musí být některé z napsaných čísel c součtem některých dalších čísel a a b splňujících $a \neq b$. Protože v rovnosti $c = a + b$ jsou všechna čísla kladná, máme kromě $a \neq b$ také $c > a$ a $c > b$. Na tabuli tedy musí být napsána alespoň tři čísla, jako např. $(1, 2, 3)$.]

N3. Vyřešte variantu soutěžní úlohy, ve které budeme podtrhávat a následně mazat právě ta čísla, která nejsou *součinem* žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli. [Je-li na tabuli číslo 1, bude v prvním kroku smazáno jako jediné. Jinak v každém kroku budou mezi smazanými dvě nejmenší čísla – výjimkou může být jen poslední krok, bude-li při něm na tabuli jediné číslo. Z uvedených poznatků už plyne, že tabule bude prázdná po nejvýše 6 krocích. Po 5 krocích ještě prázdná být nemusí, jak ukazuje příklad výchozích čísel 1, 2, 3, 6, 18, …, kde každé číslo počínaje čtvrtým je rovno součinu dvou čísel předchozích. Hledaný největší počet kroků je tedy roven 5.]

D1. Na začátku můžeme na tabuli napsat libovolnou sedmici různých přirozených čísel obsahující čísla 1 a 2. Najděte všechny takové sedmice, pro které po třech krocích tabule ještě nebude prázdná. [Takové sedmice jsou čtyři: $(1, 2, 3, 4, 7, 10, 17)$, $(1, 2, 3, 4, 7, 11, 18)$, $(1, 2, 3, 5, 8, 11, 19)$ a $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$. V každém kroku musíme smazat pouze dvě nejmenší čísla. Uspořádejme čísla vzestupně. Třetí číslo tak musí být $1 + 2 = 3$, čtvrté $1 + 3 = 4$ nebo $2 + 3 = 5$. Podobně po číslech $3, 4$ musí následovat čísla $7, 10$ nebo $7, 11$ a po číslech $3, 5$ čísla $8, 11$ nebo $8, 13$. Poslední sedmé číslo musí být součtem pátého a šestého čísla.]

D2. Jak by se změnily závěry soutěžní úlohy, pokud by na začátku bylo napsáno na tabuli jakýchkoli deset navzájem různých *celých* čísel? [Už tvrzení z části a) by přestalo platit – uvažte například desetici $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, ve které žádné číslo nepodtrhneme, a tedy ani nesmažeme.]

D3. Mějme nějakou výchozí desetici různých přirozených čísel, pro kterou po čtyřech krocích tabule ještě nebude prázdná. Může se největší číslo z takové desetice rovnat číslu 35? [Může:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to (\underline{3}, \underline{4}, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to$$
$$\to (\underline{7}, \underline{10}, \underline{11}, 17, 18, 35) \to (\underline{17}, \underline{18}, 35) \to (\underline{35}).\ ]$$

2. *Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Počet M všech možných vyplnění tabulky 3×3 čísly od 1 do 9 má hodnotu $M = 9!$ (viz návodnou úlohu N2).

Abychom určili hodnotu L, zabývejme se nejdříve otázkou, jak v tabulce 3×3 vybrat pozice pro sudá a lichá čísla, aby vyplněná tabulka měla součet tří čísel v každém řádku i sloupci lichý. Vyplatí se nám k tomu užívat ***l*** a ***s*** jako znaky lichých, resp. sudých čísel.

Uvědomme si, že součet tří čísel je ***l***, právě když mezi sčítanci je buď jedno ***l***, nebo tři ***l***. Proto je nějaké vyplnění tabulky vyhovující, právě když v libovolném řádku i sloupci je buď jedno, nebo tři ***l***. Protože mezi čísly od 1 do 9 je pět ***l*** (a čtyři ***s***), jsou počty ***l*** v jednotlivých řádcích zřejmě rovny $1, 1, 3$ (v jakémkoli pořadí); totéž platí pro počty ***l*** v jednotlivých sloupcích. Obojí nastane, právě když všech pět ***l*** vyplňuje sjednocení jednoho řádku a jednoho sloupce (všechna čtyři pole mimo toto sjednocení pak vyplňují ***s***).

Jelikož řádek pro tři ***l*** lze vybrat 3 způsoby a rovněž tak sloupec pro tři ***l*** lze vybrat 3 způsoby, existuje právě $3 \cdot 3 = 9$ vyhovujících vyplnění tabulky 3×3 pěti znaky ***l*** a čtyřmi znaky ***s***. Při každém takovém vyplnění pak (podle N2) pět znaků ***l*** můžeme nahradit čísly 1, 3, 5, 7, 9 právě $5!$ způsoby, čtyři ***s*** pak čísly 2, 4, 6, 8 právě $4!$ způsoby. Pro nahrazení všech znaků v jedné tabulce tak máme $5! \cdot 4!$ možností, přitom výchozích tabulek je 9. Odtud už vychází $L = 9 \cdot 5! \cdot 4!$.

Pro určené hodnoty M a L platí

$$\frac{L}{M} = \frac{9 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{9 \cdot 5! \cdot 24}{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{14},$$

je tedy $L : M = 1 : 14$.

Poznámka. V našem řešení jsme vlastně postupovali tak, že jsme každé vyplnění tabulky 3×3 čísly od 1 do 9 „zakódovali“ jako tabulku 3×3 vyplněnou pěti ***l*** a čtyřmi ***s***, podle které totiž lze rozhodnout, zda je výchozí vyplnění vyhovující (či nikoli). Je zřejmé, že jedna taková tabulka s pěti ***l*** a čtyřmi ***s*** odpovídá stejnému počtu výchozích vyplnění (v řešení jsme ten počet $5! \cdot 4!$ určili). Hledaný poměr $L : M$ bychom proto mohli hledat jako poměr menších čísel $L' : M'$, kde M' je počet všech rozmístění pěti znaků ***l*** do polí tabulky 3×3 a L' je počet jejich vyhovujících rozmístění. Z kombinatoriky je známo, že $M' = \binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 14$ (viz doplňující úlohu D1) a z našeho řešení víme, že $L' = 9$. Tím pádem

$$\frac{L}{M} = \frac{L'}{M'} = \frac{9}{9 \cdot 14} = \frac{1}{14}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Tabulka 3×3 je vyplněna různými celými čísly tak, že součty tří čísel v každém řádku i sloupci jsou lichá čísla. Mohou být v tabulce a) čísla od 1 do 9, b) čísla od 2 do 10? [a) ano, b) ne. V případě a) například můžeme lichými čísly, kterých je 5, zaplnit první řádek a první sloupec. Protože $2 + 3 + \ldots + 10 = 54$ je sudé číslo, musí být v případě b) sudý součet čísel v aspoň jednom řádku (i v aspoň jednom sloupci).]

N2. Nechť $k > 1$ je celé číslo. Mějme dánu tabulku o k polích, kterou máme vyplnit k danými a navzájem různými čísly (tak, aby každé z nich bylo použito). Dokažte, že počet všech takových vyplnění je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$. Tento součin nazýváme faktoriálem čísla k a značíme symbolem $k!$, který čteme „k faktoriál“. Klademe také $1! = 1$ a $0! = 1$. [Označme pole čísly od 1 do k a vybírejme pro ně čísla postupně takto: nejdříve pro pole 1, pak pro pole 2 atd., až nakonec pro pole k. Počty možností těchto výběrů budou postupně k, $k-1$ atd., až 1. Celkový počet vyplnění dostaneme, když uvedené počty možností mezi sebou vynásobíme.]

N3. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 2×2 a čísla od 1 do 4. [1 : 3. Mezi čísly od 1 do 4 jsou dvě lichá a dvě sudá, takže všechny řádkové a sloupcové součty budou liché, když lichá čísla 1 a 3 nebudou ležet ani ve stejném řádku ani sloupci, tj. budou na jedné z obou diagonál. Vybrat diagonálu pro čísla 1, 3 můžeme dvěma způsoby, umístit na ni čísla 1, 3 dvěma způsoby a na druhou diagonálu čísla 2, 4 též dvěma způsoby. Celkem tak existuje právě $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ vyplnění, která vyhovují zadání. Jelikož podle N2 je počet všech vyplnění roven $4! = 24$, hledaný poměr je roven 8 : 24 neboli 1 : 3.]

D1. Mějme celá čísla $0 \leqq k \leqq n$. Kolika způsoby lze z n kuliček různých barev vybrat některých k? [Vybírejme těchto k kuliček jednu po druhé. V prvním kroku máme n možností, v druhém $n-1$ možností atd., až v k-tém kroku máme $n-k+1$ možností. Uvědomme si, že pokud vybereme tytéž kuličky v jiném pořadí, dostaneme stejný výsledný výběr. Možných pořadí k kuliček je podle N2 právě $k!$. Hledaný počet k-tic je proto roven $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Výsledek se nazývá *kombinační číslo* a značí se symbolem $\binom{n}{k}$, který čteme „n nad k“.]

D2. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 4 krát 4 a celá čísla od 1 do 16. [$L : M = 8 : 715$. Pro počet M všech vyplnění platí $M = 16!$. Ukažme dále, že pro počet L těch vyplnění, kde jsou součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla, platí $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$. Odtud už po rutinním zkrácení zlomku $(144 \cdot 8! \cdot 8!)/16!$ vyplyne uvedený výsledek.

Mezi čísly od 1 do 16 je právě osm lichých čísel. V každém řádku musí být buď jedno, nebo tři lichá čísla. Celkem jich je 8, proto snadno zjistíme, že ve dvou řádcích r_1, r_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou řádcích r_3, r_4 jedno liché číslo. Stejný závěr platí také pro sloupce – ve dvou sloupcích s_1, s_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou sloupcích s_3, s_4 jedno liché číslo.

Ukažme, že ve čtveřici políček daných průnikem řádků r_1, r_2 se sloupci s_1, s_2 jsou jen lichá čísla. Označme jejich počet x. Protože v řádcích r_1 a r_2 je dohromady 6 lichých čísel, což platí i pro sloupce s_1 a s_2, máme $2 \cdot 6 - x \leqq 8$, odkud $x \geqq 4$, tj. skutečně $x = 4$. Zmíněná čtveřice políček tak obsahuje čtyři lichá čísla. Zbylá dvě lichá čísla z řádků r_1 a r_2 se pak nacházejí po jednom ve sloupcích s_3 a s_4, pro výběr jejich pozic tak máme 2 možnosti. Totéž platí pro zbylá dvě lichá čísla ze sloupců s_1 a s_2: pro výběr jejich pozic v řádcích r_3 a r_4 máme rovněž 2 možnosti. Tím máme popsány možné vyhovující pozice všech osmi lichých čísel.

Celkový počet vyhovujících výběrů pozic lichých a sudých čísel proto spočteme takto: nejdříve zvolíme libovolně dvojici řádků s_1, s_2 (6 možností) a dvojici sloupců r_1, r_2 (6 možností), potom provedeme výběry pro pozice lichých čísel ve dvojicích sloupců s_3, s_4 a r_3, r_4 (pro každý z obou výběrů máme jak víme 2 možnosti). Počet vyhovujících výběrů pozic pro lichá a sudá čísla je tedy $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$. Odtud už plyne výše uvedená hodnota $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$, neboť 8 pozic pro lichá čísla stejně jako 8 pozic pro sudá čísla můžeme vyplnit 8! způsoby.]

D3. Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje? [50–B–I–3]

D4. Je dáno celé číslo $n \geqq 2$. Kolika způsoby lze vybarvit políčka tabulky $n \times n$ čtyřmi barvami tak, aby v každém čtverečku 2×2 byla každá barva použita právě jednou? [$2^3 \cdot 3^{2n-3}$ způsoby. Vybarvěme nejprve první řádek a první sloupec tak, aby v žádném čtverci 2×2 nebyla žádná barva použita vícekrát. Začněme políčkem v levém horním rohu – pro jeho vybarvení máme 4 možnosti. Pak postupně vybarvujme první sloupec shora dolů – v každém kroku máme na výběr ze tří barev. Nakonec vybarvíme první řádek zleva doprava – v prvním kroku máme pouze 2 možnosti obarvení, ve zbylých krocích máme 3 možnosti. Celkový počet vyhovujících obarvení prvního řádku a prvního sloupce je proto roven $4 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-2}$, tj. $2^3 \cdot 3^{2n-3}$. To je výsledek úlohy, neboť každé takové obarvení lze rozšířit na vyhovující obarvení celé tabulky právě jedním způsobem. Skutečně, jakmile známe barvy tří políček některého čtverečku 2×2, barva čtvrtého políčka je jednoznačně určena; takové dobarvování můžeme provést například tak, že zleva doprava dobarvíme $n-1$ čtverečků nejprve ve druhém řádku, pak ve třetím řádku atd. až nakonec v n-tém řádku. Využijeme přitom všech $(n-1)^2$ čtverečků 2×2 v dané šachovnici, takže získané obarvení je vyhovující.]

3. *Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic*

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \qquad a \qquad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. (Jaroslav Švrček)

Řešení. Obě zadané rovnice po dosazení trojčlenů P a Q

$$a(x^2 + ax + b) + b(x^2 + bx + a) = 0, \quad \text{resp.} \quad a(x^2 + bx + a) + b(x^2 + ax + b) = 0$$

upravíme do standardního tvaru

$$(a + b)x^2 + (a^2 + b^2)x + 2ab = 0, \quad \text{resp.} \quad (a + b)x^2 + 2abx + (a^2 + b^2) = 0. \tag{1}$$

Vidíme, že v případě $a + b = 0$ nejsou tyto rovnice kvadratické, což odporuje zadání. Hledaná čísla a, b tak nutně vyhovují podmínce $a + b \neq 0$, o které budeme dále předpokládat, že je splněna.

Jak dobře víme, kvadratické rovnice mají dvojnásobné kořeny, právě když jsou jejich diskriminanty nulové. V případě rovnic (1) tak vypsáním jejich diskriminantů dostaneme pro neznámé a, b soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)^2 - 4(a + b) \cdot 2ab &= 0,\\ (2ab)^2 - 4(a + b)(a^2 + b^2) &= 0,\end{aligned}$$

kterou přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)^2 &= 8(a + b)ab,\\ (a + b)(a^2 + b^2) &= a^2b^2.\end{aligned} \tag{2}$$

Vynásobme první rovnici výrazem $a^2 + b^2$ (nenulovým díky podmínce $a + b \neq 0$). Dostaneme rovnici

$$(a^2 + b^2)^3 = 8(a^2 + b^2)(a + b)ab.$$

Sem do pravé strany můžeme za $(a^2 + b^2)(a + b)$ dosadit a^2b^2 podle druhé rovnice z (2). Po tomto zjednodušení tak předchozí rovnice získá tvar

$$(a^2 + b^2)^3 = 8a^3b^3 \quad \text{neboli} \quad (a^2 + b^2)^3 = (2ab)^3. \tag{3}$$

Jelikož třetí mocniny dvou reálných čísel se jak známo rovnají, právě když se rovnají jejich základy, z odvozené rovnice (3) plyne $a^2 + b^2 = 2ab$ neboli $(a - b)^2 = 0$, což nastane jen v případě $a = b$. Po dosazení do první z rovnic (2) obdržíme

$$(a^2 + a^2)^2 = 8(a + a)a^2, \quad \text{po úpravě} \quad a^3(a - 4) = 0.$$

Vycházejí tak jen dvě možnosti – dvojice (a, b) je rovna buď $(0, 0)$, nebo $(4, 4)$. Protože dvojice $(0, 0)$ odporuje odvozené podmínce $a + b \neq 0$, v úvahu připadá pouze dvojice $(a, b) = (4, 4)$. Ta je skutečně řešením naší úlohy, neboť je řešením soustavy (2), která vyjadřuje nulovost diskriminantů obou rovnic.*

* I když to není nezbytné, poznamenejme, že pro $a = b = 4$ mají obě rovnice ze zadání po úpravě na (1) týž tvar $8x^2 + 32x + 32 = 0$, což je rovnice s dvojnásobným kořenem -2, který rovněž určíme přímo v průběhu druhého řešení.

Poznámka. Klíčovým krokem uvedeného řešení bylo odvození důsledku (3) soustavy rovnic (2) – viz také návodnou úlohu N2. Jinak lze důsledek (3) získat rovněž tak, že rovnice z (2) mezi sebou vynásobíme a pak výslednou rovnost vydělíme výrazem $a+b$, o kterém už víme, že se nerovná nule.

Jiné řešení. Vyjádříme opět zadané rovnice ve standardním tvaru

$$(a+b)x^2+(a^2+b^2)x+2ab=0, \quad \text{resp.} \quad (a+b)x^2+2abx+(a^2+b^2)=0$$

a poznamenáme, že musí platit $a+b\neq 0$, aby šlo o kvadratické rovnice. Namísto počítání s diskriminanty nyní využijeme jiný známý poznatek o tom, že kvadratická rovnice $px^2+qx+r=0$ má dvojnásobný kořen x_0, právě když zastoupený trojčlen má rozklad $px^2+qx+r=p(x-x_0)^2$. Naší úlohou je tak najít právě ty dvojice (a,b), kde $a+b\neq 0$, pro které platí rozklady

$$\begin{aligned}(a+b)x^2+(a^2+b^2)x+2ab&=(a+b)(x+u)^2,\\ (a+b)x^2+2abx+(a^2+b^2)&=(a+b)(x+v)^2\end{aligned} \tag{4}$$

s vhodnými reálnými čísly u, v (dvojnásobnými kořeny rovnic pak budou čísla $-u$, resp. $-v$). Protože rovnosti koeficientů u mocnin x^2 jsou v každém z rozkladů (4) splněny automaticky, stačí vypsat a dále uvažovat pouze rovnosti koeficientů u mocnin x^1 a x^0:

$$x^1\colon \begin{aligned} a^2+b^2&=2(a+b)u,\\ 2ab&=2(a+b)v,\end{aligned} \qquad x^0\colon \begin{aligned} 2ab&=(a+b)u^2,\\ a^2+b^2&=(a+b)v^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Zdůrazněme, že rozklady (4) budou platit, právě když bude splněna soustava čtyř rovnic (5). Vyřešíme ji vcelku snadno.

Předně si uvědomíme, že z $a+b\neq 0$ plyne $a^2+b^2\neq 0$, tudíž podle (5) rovněž platí $u,v,a,b\neq 0$. Porovnáme-li proto dvojice rovnic v (5) vzatých „do kříže“, dostaneme rovnice $2u=v^2$ a $u^2=2v$. Jejich vynásobením dostaneme $2u^3=2v^3$ neboli $u=v$, a proto z $2u=v^2$ s ohledem na $u\neq 0$ máme $u=v=2$. Zbývá určit odpovídající čísla a a b.

Pro odvozené hodnoty $u=v=2$ se soustava (5) redukuje na dvojici rovnic

$$a^2+b^2=4(a+b)=2ab.$$

Z rovnosti krajních výrazů ovšem máme $(a-b)^2=0$, tj. $a=b$, takže $4(a+b)=2ab$ znamená $8a=2a^2$, odkud už s ohledem na $a\neq 0$ dostáváme jediné vyhovující hodnoty $a=b=4$.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, pro které reálné hodnoty parametru p je

$$(p+2)x^2+2(p+1)x+(p-1)=0$$

kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. [Jediná hodnota $p=-3$. Pokud $p=-2$, nejedná se o kvadratickou rovnici. Je-li $p\neq -2$, má tato kvadratická rovnice dvojnásobný kořen, právě když je její diskriminant nulový. Ten je přitom roven $(2(p+1))^2-4(p+2)(p-1)$, po úpravě $4(p+3)$, což je rovno nule pouze pro $p=-3$.]

* Ani při druhém řešení není zkouška nutná.

N2. Nechť reálná čísla r, s, t splňují soustavu dvou rovnic $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Dokažte, že $r = 2s$. Rozmyslete si, jak tento výsledek využít k řešení soutěžní úlohy, když za r, s, t zvolíte vhodné výrazy. [Vynásobíme-li první rovnici r, dostáváme $r^3 = 8rst$. Na pravé straně pak můžeme nahradit rt za s^2 díky druhé rovnici. Obdržíme $r^3 = 8s^3$ neboli $r^3 = (2s)^3$, což skutečně dává $r = 2s$, neboť funkce $y = x^3$ je jak známo rostoucí, a tedy prostá. Užití k řešení soutěžní úlohy zde prozrazovat nebudeme.]

D1. Najděte všechny kvadratické trojčleny ax^2+bx+c takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. [53–B–II–2]

D2. V oboru reálných čísel r, s, t řešte soustavu dvou rovnic z úlohy N2. [Řešeními jsou právě trojice $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$ a $(r, s, t) = (0, 0, t)$, kde t je v obou případech libovolné reálné číslo. Podle N2 platí nutně $r = 2s$; po dosazení takového r získají rovnice tvar $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$. Vidíme, že v případě $s = 0$ je $r = 2s = 0$ a t je libovolné; v případě $s \neq 0$ se obě rovnice $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$ zjednoduší na $s = 2t$, takže $r = 2s = 4t$, a tudíž $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$, kde t je libovolné.]

D3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen. [69–B–II–1]

D4. a) Dokažte nerovnost $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b. [70–B–II–1]

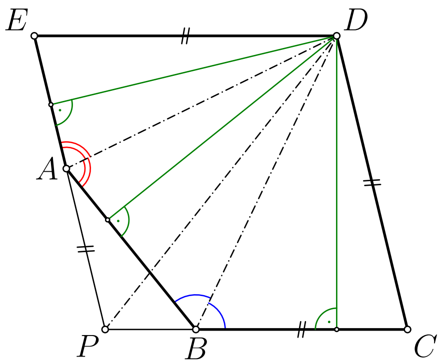
D5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1 \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

4. *V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$.* (Patrik Bak)

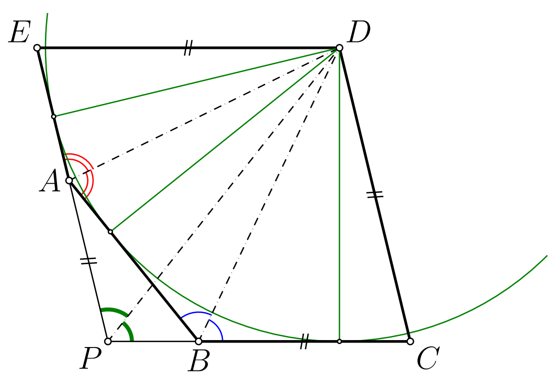
Řešení (viz obr. 1). Protože přímky BC, CD jsou různoběžné a podle zadání platí $CD \parallel AE$, jsou přímky BC a AE různoběžné. Označme P jejich průsečík. Ze zadaných podmínek rovnoběžnosti plyne, že $PCDE$ je rovnoběžník, ve kterém podle návodné úlohy N1 je A vnitřní bod strany PE a B je vnitřní bod strany PC.



Obr. 1

Naším úkolem je dokázat rovnost $|CD| = |DE|$, tj. ukázat, že sestrojený rovnoběžník $PCDE$ je kosočtverec (případně čtverec). Využijeme k tomu známý vzorec $S = zv$ pro obsah rovnoběžníku, podle kterého stačí ověřit, že výšky z vrcholu D ke stranám PC a PE jsou shodné (pak jsou totiž shodné i tyto sousední strany rovnoběžníku). Jinak řečeno, máme ověřit, že bod D má stejnou vzdálenost od přímek BC a AE. Z rovnosti $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ ovšem plyne, že bod D leží na ose konvexního úhlu BAE, takže má bod D stejnou vzdálenost od přímek AE a AB (viz návodnou úlohu N2). Podobně z rovnosti $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ plyne, že bod D má stejnou vzdálenost od přímek AB a BC. Dohromady dostáváme, že bod D má stejnou vzdálenost od přímek BC a AE, jak jsme chtěli ukázat.

Jiné řešení (viz obr. 2). Stejně jako v prvním řešením uvážíme rovnoběžník $PCDE$ a jiným způsobem ověříme, že to je kosočtverec (případně čtverec). Namísto vzorce pro jeho obsah využijeme poznatky o kružnicích připsaných stranám obecného trojúhelníku (které jsou méně známé, a proto se jim věnujeme v návodné úloze N3 – na tu se už v dalším odstavci nebudeme odvolávat).



Obr. 2

V prvním řešení jsme vyšli z toho, že bod D leží na osách konvexních úhlů BAE a ABC. Jinak vyjádřeno, bod D leží na osách vnějších úhlů při vrcholech A a B trojúhelníku APB. Kružnice připsaná jeho straně AB má tedy střed právě v bodě D, takže D leží rovněž na ose (vnitřního) úhlu při vrcholu P tohoto trojúhelníku (viz další obrázek). Tento úhel APB je ovšem totožný s úhlem EPC, takže vrchol D rovnoběžníku $PCDE$ leží na ose jeho vnitřního úhlu při vrcholu P, jedná se proto skutečně o kosočtverec (případně čtverec).

Jiné řešení. Obě předchozí řešení byla založena na poznatku, že bod D má stejné vzdálenosti od tří přímek AB, BC a AE (ve druhém řešení to byl poloměr připsané kružnice). Známe-li sinovou větu pro obecný trojúhelník, můžeme podat třetí variantu řešení skrytě využívající stejný poznatek (viz poznámku za řešením), při které navíc nevyužijeme ani pomocný bod P. Tento postup zapíšeme následovně.

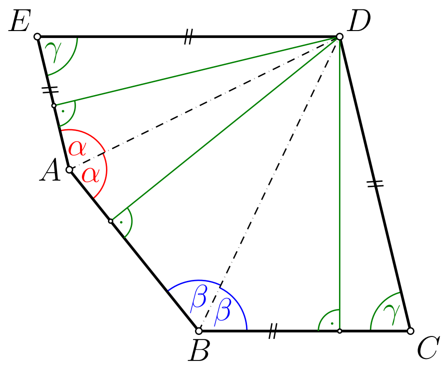
Na obrázku 3 jsou vyznačeny tři úhly α, β a γ určené rovnostmi

$$\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|, \quad \beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|, \quad \gamma = |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle AED|$$

(shodnost dvojice úhlů DCB a AED platí díky rovnoběžnostem ze zadání). Užitím sinové věty v trojúhelnících BCD, ADE a ABD dostaneme po řadě rovnosti

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \qquad \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Vynásobením těchto tří rovností dostaneme $|DE|/|CD| = 1$, tj. $|CD| = |DE|$, jak jsme měli dokázat.



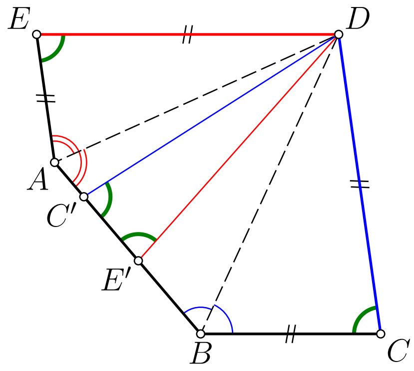
Obr. 3

Poznámka. Tři rovnosti ze sinové věty, které jsme využili, plynou z dvojích vyjádření výšek dotyčných tří trojúhelníků

$$|CD|\sin\gamma = |BD|\sin\beta, \ |AD|\sin\alpha = |DE|\sin\gamma, \ |BD|\sin\beta = |AD|\sin\alpha,$$

které jsou zmíněnými vzdálenostmi bodu D po řadě od přímek BC, AE, AB.

Jiné řešení (viz obr. 4). Obraz C' bodu C v osové souměrnosti podle přímky BD leží na polopřímce BA tak, že $|C'D| = |CD|$ a $|\sphericalangle DC'B| = |\sphericalangle DCB|$. Podobně obraz E' bodu E v osové souměrnosti podle přímky AD leží na polopřímce AB tak, že $|E'D| = |ED|$ a $|\sphericalangle DE'A| = |\sphericalangle DEA|$. Je-li $C' = E'$, jsme hotovi: $|CD| = |C'D| = |E'D| = |ED|$. Stejná série rovností platí i v případě $C' \neq E'$, neboť trojúhelník $DC'E'$ má



Obr. 4

shodné úhly u vrcholů C' a E'. Z rovnoběžností $BC \parallel DE$ a $CD \parallel AE$ totiž plyne shodnost úhlů DCB a DEA, a tedy i úhlů $DC'B$ a $DE'A$, které jsou oba vnitřními či oba vnějšími úhly trojúhelníku $DC'E$ – kdyby jeden z nich byl vnitřní úhel a druhý vnější úhel, měl by ten první menší velikost.*

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozmyslete si a zdůvodněte, že pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy lze získat z jistého rovnoběžníku „odstřihnutím" jednoho jeho „rohu". [Zadaný konvexní pětiúhelník leží jak v pásu mezi rovnoběžkami BC a DE, tak v pásu mezi rovnoběžkami CD a AE. Proto leží i v průniku těchto dvou pásů, kterým je rovnoběžník $PCDE$, kde P je průsečík (různoběžných) přímek BC a AE. Protože zbylé vrcholy A, B jsou vnitřní body stran PE, resp. PC, od rovnoběžníku $PCDE$ oddělíme trojúhelník APB.]

N2. Připomeňme, že osou libovolného (konvexního i nekonvexního) úhlu s vrcholem V nazýváme tu polopřímku s počátečním bodem P, která daný úhel rozděluje na dva shodné úhly (tj. úhly téže velikosti). Připomeňte si rovněž a dokažte „větu o ose úhlu": *Osa úhlu AVB, který má velikost menší než $180°$, je tvořena právě těmi jeho body, které mají od obou přímek VA, VB stejnou vzdálenost.* [Označme $\alpha = |\sphericalangle AVB|$. Stačí uvažovat jen vnitřní body úhlu AVB, nechť X je libovolný z nich. Při označení $\alpha_1 = |\sphericalangle AVX|$ a $\alpha_2 = |\sphericalangle XVB|$ platí $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 180°$ a bod X má od přímek VA, VB vzdálenosti $|VX| \sin \alpha_1$, resp. $|VX| \sin \alpha_2$. Ty se proto rovnají, právě když platí $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, což pro konvexní úhly nastane jen ve dvou případech: $\alpha_1 = \alpha_2$ nebo $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. Druhý z nich je však výše vyloučen; první případ znamená právě to, že X je vnitřním bodem osy úhlu AVB.]

N3. Kružnicí připsanou (ke) straně KL obecného trojúhelníku KLM rozumíme tu kružnici, která se dotýká strany KL v jejím vnitřním bodě a přímek KM, LM v bodech ležících uvnitř poloroviny opačné k polorovině KLM. Dokažte, že střed takové kružnice je průsečíkem os vnějších úhlů při vrcholech K, L trojúhelníku KLM a že jím prochází rovněž osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu M. [Průsečík S zmíněných dvou os vnějších úhlů je vnitřním bodem úhlu KML ležícím v polorovině opačné k polorovině KLM a má podle N2 stejnou vzdálenost v od všech tří přímek KM, KL a LM, tedy (opět díky N2) leží i na ose úhlu KML. Kružnice se středem S a poloměrem v je pak zřejmě připsána straně KL trojúhelníku KLM.]

D1. Dokažte, že pro pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60°$. [Nechť P je průsečík přímek BC a AE. Pak $PCDE$ je rovnoběžník s body A, B uvnitř stran PE, resp. PC. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ a $\delta = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EPC|$. Ze součtu vnitřních úhlů $\triangle APB$, který má vyjádření $(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) + \delta = 180°$, plyne rovnost $\alpha + \beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$. Porovnáme-li

* Upozorněme, že body A, B, C', E' mohou ležet na přímce v jiných pořadích než na obrázku; proto se nestačí odkázat na to, co je z (jednoho) obrázku vidět.

v $\triangle ADE$ vnitřní úhel u vrcholu A s vnějším úhlem při vrcholu E, dostaneme $\alpha < \delta$. Stejně tak z $\triangle BCD$ obdržíme $\beta < \delta$. Sečtením dvou odvozených nerovností vychází $\alpha + \beta < 2\delta$, takže z rovnosti $\alpha + \beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$ plyne $90° + \frac{1}{2}\delta < 2\delta$, odkud $\delta > 60°$, jak jsme měli dokázat.]

D2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [71–B–I–2]

D3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímky BI, CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB, AC v bodech K, L. Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec). [71–A–S–2]

D4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC, přitom D leží mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F. Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$. [70–A–II–3]

5. *Zkoumejme trojice (a,b,c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab=c^2$.*

a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a,b,c), pro kterou platí rovnost $a+b-2c=p$.

b) Dokažte, že pro každou trojici (a,b,c) je $a+b+2c$ složené číslo.

(Josef Tkadlec)

Řešení. a) Zkoušením malých hodnot a, b, c můžeme najít například trojici $(a,b,c) = (4,1,2)$, která vyhovuje podmínce $ab=c^2$ a zároveň pro ni platí rovnost $a+b-2c=1$. Vynásobíme-li nyní každé z těchto čísel a, b, c daným prvočíslem p, podmínka $ab=c^2$ zůstane zachována a hodnota výrazu $a+b-2c$ se změní z 1 na p. Dostáváme tak příklad trojice $(a,b,c)=(4p,p,2p)$, která má požadované vlastnosti.

b) Označme d největší společný dělitel čísel a, b. Pak $a=a'd$ a $b=b'd$, kde a' a b' jsou nesoudělná kladná celá čísla. Protože součin ab má být druhou mocninou kladného celého čísla c, z rovnosti $c^2=ab=(a'b')d^2$ podle návodné úlohy N2 plyne, že také součin $a'b'$ musí být druhou mocninou kladného celého čísla. To díky návodné úloze N3 znamená, že sama čísla a', b' musí být druhými mocninami nějakých kladných celých čísel u a v, tedy $a'=u^2$ a $b'=v^2$. Čísla a, b tak jsou tvaru $a=u^2d$ a $b=v^2d$. Po jejich dosazení do rovnosti $ab=c^2$ dostaneme $(uvd)^2=c^2$, odkud $c=uvd$. Celkem tak každé řešení rovnice $ab=c^2$ v oboru kladných celých čísel má tvar

$$a=u^2d,\quad b=v^2d,\quad c=uvd.$$

Zadaný výraz $a+b+2c$ proto má hodnotu

$$a+b+2c=u^2d+v^2d+2uvd=(u+v)^2d. \tag{1}$$

Protože $u,v \geqq 1$, platí $u+v \geqq 2$. Číslo $(u+v)^2$ je tak složené. Díky (1) je proto složené i číslo $a+b+2c$, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Lze dokázat (viz doplňující úlohu D1), že každá trojice (a,b,c) vyhovující zadání části a) je dána vztahy

$$\{a,b\}=\{(n+1)^2p,n^2p\}\quad \text{a}\quad c=n(n+1)p,$$

kde n je libovolné kladné celé číslo. Například pro $n=1$ dostáváme za podmínky $a>b$ trojici $(a,b,c)=(4p,p,2p)$.

Jiné řešení. Nejprve dokážeme tvrzení z části b), a to sporem. Uvědomme si, že číslo $a+b+2c$ je aspoň 4, takže není složené, právě když je prvočíslo. Připusťme tedy, že existuje některá trojice (a,b,c) a prvočíslo p takové, že $a+b+2c=p$. Pak $a+b=p-2c$, odkud umocněním a využitím rovnosti $ab=c^2$ dostaneme

$$(a+b)^2=p^2-4pc+4c^2=p^2-4pc+4ab.$$

Tuto rovnost upravíme na tvar $(a-b)^2=p(p-4c)$. Z něj vidíme, že prvočíslo p je dělitelem rozdílu $a-b$. Pokud by se ovšem kladná čísla a, b navzájem lišila o nenulový násobek čísla p, měli bychom $a+b+2c>a+b>p$, a to je spor. Proto platí $a=b$, takže z rovnosti $ab = c^2$ plyne $a = b = c$. Pak ovšem $p = a + b + 2c = 4c$, tedy prvočíslo p je násobkem čtyř, a to je spor.

Podobným postupem můžeme rovněž pro část a) hledat k danému prvočíslu p trojici (a, b, c) splňující rovnost $a + b - 2c = p$. Její úpravou tentokrát dostaneme $(a-b)^2 = p(p+4c)$. Odtud opět plyne, že čísla a, b se liší o násobek čísla p, tj. $a = b + kp$ pro vhodné celé číslo. Po dosazení za a do rovnosti $a + b - 2c = p$ dostaneme po úpravě $2(c - b) = (k - 1)p$. Vidíme, že volbou $k = 3$ bude rovnost $2(c - b) = (k - 1)p$ splněna, pokud bude $c - b = p$, tj. $c = b + p$. Dosadíme-li takové c spolu s $a = b + 3p$ do rovnosti $ab = c^2$, dostaneme $(b + 3p)b = (b + p)^2$, po úpravě $bp = p^2$ neboli $b = p$. Opět tak dostáváme trojici $(a, b, c) = (4p, p, 2p)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Existuje nějaká trojice (a, b, c) přirozených čísel splňující podmínky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Pokud ano, jak by se dala využít k řešení části a) soutěžní úlohy pro libovolné prvočíslo p? [Ano, ale prozrazovat ji nebudeme, natož způsob, jak by se dala využít. Zkuste vypsat všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel splňujících rovnici $ab = c^2$ pro malé hodnoty c. Vyhovuje některá z nich i druhé podmínce?]

N2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla u, v, w platí $u^2 = v^2 w$, je číslo w druhou mocninou přirozeného čísla. [Uvažme libovolné prvočíslo p dělící číslo w. Z rovnosti $u^2 = v^2 w$ plyne, že p je také dělitel čísla u, takže číslo u^2 má ve svém rozkladu na prvočinitele sudý počet výskytů p, který ovšem musí být větší než případný sudý počet výskytů p v rozkladu čísla v^2. Odtud už plyne, že p má také sudý počet výskytů v rozkladu čísla w, které tudíž je druhou mocninou přirozeného čísla (platí to i v případě $w = 1$).]

N3. Dokažte, že pokud součin dvou nesoudělných přirozených čísel u, v je roven druhé mocnině celého čísla, jsou obě čísla u, v také druhými mocninami celých čísel. [Uvažme rozklady čísel u, v a uv na prvočinitele. V rozkladu druhé mocniny rovné číslu uv má každé prvočíslo sudý počet výskytů. Čísla u, v však nemají žádného společného prvočinitele, proto také v jejich rozkladech má každé prvočíslo sudý počet výskytů (v jednom z rozkladů u, v je to nula, ve druhém stejný počet jako v rozkladu uv).]

D1. Pro dané prvočíslo p najděte *všechny* trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících obě rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$. [$\{a, b\} = \{(n + 1)p, np\}$ a $c = n(n + 1)p$, kde n je libovolné přirozené číslo. Označme d největší společný dělitel čísel a, b. Protože součin ab má být druhou mocninou celého čísla, podle N2 a N3 platí $a = u^2 d$, $b = v^2 d$ pro vhodná přirozená u, v, takže $c = uvd$. Dosazením do $a + b - 2c = p$ po snadné úpravě dostáváme $d(u - v)^2 = p$. Protože p je prvočíslo, musí být nutně $(u - v) = \pm 1$ a $d = p$. V případě $u - v = 1$ máme $a = (v + 1)^2 p$, $b = v^2 p$ a $c = v(v + 1)p$; v případě $u - v = -1$ podobně $a = u^2 p$, $b = (u + 1)^2 p$ a $c = u(u + 1)p$.]

D2. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. [71–B–I–1]

D3. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

D4. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D5. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla. [69–A–III–4]

6. *Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC. Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný.*

(David Hruška)

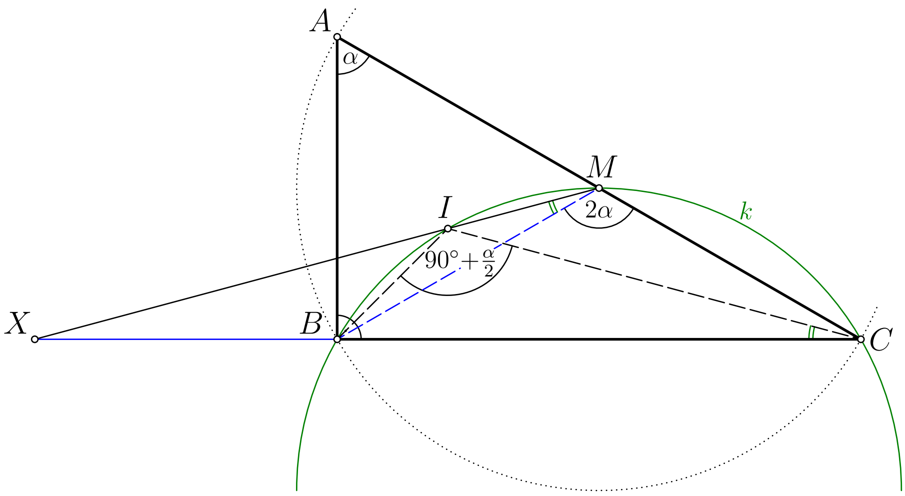
Řešení. Jelikož je trojúhelník ABX pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B a my máme dokázat, že je navíc rovnoramenný, je naším cílem odvodit rovnost $|AB| = |BX|$.

Označme k kružnici, na které podle zadání leží body B, I, M a C, a to zřejmě v tomto pořadí. Podle věty o obvodových úhlech jsou úhly BIC a BMC nad tětivou BC kružnice k shodné. Jejich velikosti nyní vyjádříme pomocí velikosti α vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC, abychom pak jejich porovnáním úhel α určili.

Podle Thaletovy věty je bod M středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, tudíž díky větě o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle BMC| = 2\alpha$. Dodejme ještě jeden důsledek Thaletovy věty, který využijeme za chvíli: Rovnosti $|MA| = |MB| = |MC|$ znamenají, že oba trojúhelníky ABM a BCM jsou rovnoramenné.

K určení velikosti úhlu BIC využijeme toho, že polopřímky BI a CI jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Proto při standardním značení jejich velikostí dostáváme*

$$|\sphericalangle BIC| = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha.$$



Shodnost úhlů BIC a BMC tedy znamená, že platí $2\alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, neboli $\alpha = 60^\circ$. Rovnoramenný trojúhelník ABM je tudíž rovnostranný:

$$|AB| = |BM| = |MA|, \tag{1}$$

zatímco druhý rovnoramenný trojúhelník BCM má při základně BC vnitřní úhly velikosti $\gamma = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$.

Určené úhly teď využijeme k výpočtu některých dalších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku $BCMI$ s opsanou kružnicí k. Z rovností $|\sphericalangle BCM| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle IBC| = 45^\circ$ dostáváme

$$|\sphericalangle BMI| = |\sphericalangle BCI| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle BCM| = 15^\circ,$$
$$|\sphericalangle CMI| = 180^\circ - |\sphericalangle IBC| = 135^\circ.$$

* Není podstatné, že $\beta = 90^\circ$ – odvozený vzorec pro $|\sphericalangle BIC|$ platí v obecném trojúhelníku ABC, jak uvádíme v návodné úloze N3.

Tím pádem $|\sphericalangle BCM| + |\sphericalangle CMI| = 30° + 135° = 165° < 180°$, odkud plyne, že bod X ze zadání úlohy je společným bodem polopřímek CB, MI a že v trojúhelníku CMX platí $|\sphericalangle MXC| = 180° - 165° = 15°$. Všimněme si ještě, že bod B je vnitřním bodem úsečky CX (neboť leží v polorovině MIC díky konvexnosti $BCMI$). Proto platí

$$|\sphericalangle MXB| = |\sphericalangle MXC| = 15° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BMX| = |\sphericalangle BMI| = 15°.$$

Trojúhelník BMX je tudíž rovnoramenný se základnou MX, takže $|BM| = |BX|$. To spolu s (1) již vede ke kýženému závěru, že totiž $|AB| = |BX|$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší. c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC|+|\sphericalangle BA'C|$ byl co největší. [V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočtěte úhly, nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. V části a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v části b), a to nezávisle na volbě δ.* V části c) vyjde součet $180°$ nezávisle na poloze bodu A nebo A'.**]

N2. Mějme dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Dokažte, že jeho vrcholy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$. [Úvodem konstatujme, že díky konvexnosti $PQRS$ leží vrcholy R, S posuzovaných úhlů PRQ, PSQ uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou PQ. Předpokládejme nejprve, že čtyřúhelník $PQRS$ má všechny čtyři vrcholy na jedné kružnici. Rovnost $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$ je pak rovností dvou obvodových úhlů této kružnice, které přísluší témuž oblouku PQ.

Předpokládejme naopak, že úhly PRQ a PSQ jsou shodné a označme φ jejich velikost. Dokážeme, že kružnice opsané trojúhelníkům PRQ a PSQ mají stejný střed, tím pádem i stejný poloměr. V případě $\varphi = 90°$ je to důsledek Thaletovy věty. Posuďme nyní případ $\varphi < 90°$. Středy kružnic opsaných trojúhelníkům PRQ a PSQ pak leží uvnitř poloroviny $PQR = PQS$ a každý z nich tvoří s body P a Q rovnoramenný trojúhelník ze základnou PQ, který má podle věty o obvodovém a středovém úhlu u hlavního vrcholu úhel 2φ. Proto tyto dva středy splývají. V případě $\varphi > 90°$ pak středy obou opsaných kružnic leží v polorovině opačné k polorovině $PQR = PQS$ a odpovídající rovnoramenné trojúhelníky tehdy mají u hlavního vrcholu úhel $360° - 2\varphi$.***]

N3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete velikost úhlu BIC pomocí α. [$90° + \frac{1}{2}\alpha$. Označme po řadě β, γ velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C. Protože bod I leží na osách obou těchto úhlů, ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku BIC dostáváme $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90° + \frac{1}{2}\alpha$.]

N4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme M střed přepony AC a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete pomocí α velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelnících ABM a BCM. [Trojice $(\alpha, \alpha, 180° - 2\alpha)$ a $(90° - \alpha, 90° - \alpha, 2\alpha)$. Využijte toho, že díky Thaletově větě jsou oba trojúhelníky ABM a BCM rovnoramenné s hlavním vrcholem M.]

---

* Oba fakty jsou důsledkem známé *věty o obvodových a středových úhlech* v libovolné kružnici.

** Výsledek části c) má známé zobecnění: Konvexní čtyřúhelník je tětivový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když součet velikostí jeho protějších vnitřních úhlů je $180°$.

*** Dokázané tvrzení je okamžitým důsledkem tzv. *věty o ekvigonále úsečky*: Množina všech bodů, ze kterých je daná úsečka PQ vidět pod daným úhlem α, kde $0° < \alpha < 180°$, je tvořena vnitřními body dvou kružnicových oblouků s krajními body P a Q, které jsou souměrně sdružené podle přímky PQ.

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D2. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD. [68–B–I–5]

D3. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. (Kružnicí připsanou například straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AD a BC.) [69–B–S–2]

D4. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné [68–B–S–3]

D5. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN. [70–A–III–2]