72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Uvažujme* 2022 *zlomků*

$$\frac{0}{2022}, \frac{1}{2021}, \frac{2}{2020}, \ldots, \frac{2021}{1}$$

ve tvaru podílu dvou celých nezáporných čísel, jejichž součet je pro každý zlomek roven 2022. *Kolik z nich nabývá celočíselné hodnoty?* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Jmenovateli zadaných zlomků jsou přirozená čísla od 1 do 2022. Přitom zlomek s daným jmenovatelem j má čitatel c určený rovností $c + j = 2022$, tedy $c = 2022 - j$. Naše zlomky proto mají vyjádření, které rovnou ještě upravíme:

$$\frac{2022 - j}{j} = \frac{2022}{j} - 1, \quad \text{kde} \quad j = 2022, 2021, \ldots, 1.$$

(Hodnoty jmenovatelů j jsme vypsali sestupně, jako je tomu u zlomků v zadání.)

Podle zadání je naším úkolem určit, kolik ze všech jmenovatelů j dělí příslušného čitatele $2022 - j$. Díky provedené úpravě je náš úkol usnadněn: hledáme počet těch j od 1 do 2022, která jsou děliteli čísla 2022.

Jelikož číslo 2022 má prvočíselný rozklad $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, jeho dělitelé jsou právě čísla 1, 2, 3, 6, 337, 674, 1011 a 2022, kterých je celkem osm. To jsou tedy jmenovatelé j všech uvažovaných zlomků s celočíselnými hodnotami. Jejich čitatelé $c = 2022 - j$ jsou po řadě čísla 2021, 2020, 2019, 2016, 1685, 1348, 1011 a 0.

Závěr. Celočíselné hodnoty nabývá *právě osm* ze zadaných zlomků, konkrétně

$$\frac{0}{2022}, \frac{1011}{1011}, \frac{1348}{674}, \frac{1685}{337}, \frac{2016}{6}, \frac{2019}{3}, \frac{2020}{2}, \frac{2021}{1}.$$

Poznámky.

1. Poznatek o tom, že 337 je prvočíslo, lze ověřit nahlédnutím do tabulek prvočísel. Nemáme-li je k dispozici, stačí otestovat, zda číslo 337 není dělitelné některým prvočíslem, které nepřevyšuje hodnotu $\sqrt{337}$ (jež leží mezi čísly 18 a 19, neboť $18^2 = 324$ a $19^2 = 361$). Ze školy totiž známe poznatek, že každé složené přirozené číslo n je dělitelné některým prvočíslem p s vlastností $p \leqq \sqrt{n}$.
2. Zdůrazněme, že v úplném řešení soutěžní úlohy není nutné vypisovat osm zlomků požadované vlastnosti. Místo toho lze využít fakt, že každé n tvaru $n = pqr$, kde p, q, r jsou navzájem různá prvočísla, má právě osm dělitelů. Jejich konkrétní výpis lze nahradit kombinatorickou úvahou: Pro číslo n uvedeného tvaru sestavíme jeho libovolný dělitel d tak, že se pro každé ze tří prvočísel p, q, r rozhodneme, zda je do rozkladu d na prvočinitele zařadit či nikoliv. (Nezařadíme-li kupříkladu žádné z nich, dostaneme $d = 1$.) Celkový počet možností, jak dělitel d sestavit, je proto roven $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ – jak jsme totiž uvedli, pro každé ze tří prvočísel p, q, r máme 2 možnosti: zařadit či nikoliv.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozdíl dvou přirozených čísel je roven 4, přičemž jedno z čísel je násobkem druhého. O jaká čísla se jedná? [$(5,1),(6,2),(8,4)$. Nechť $a > b$ jsou hledaná čísla. Pak menší číslo b je dělitelem většího čísla a, a tedy i dělitelem čísla $a-b$, které se podle zadání rovná 4. Proto $b \in \{1,2,4\}$. Tento poznatek plyne i z vyjádření podílu obou čísel ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}.\ ]$$

N2. Číslo 73 rozložte na součet dvou přirozených čísel tak, aby jejich podíl byl také přirozené číslo. [Jediné řešení $72+1$. Postupujte podobně jako v řešení N1: využijte kupříkladu vyjádření

$$\frac{a}{b} = \frac{73-b}{b} = \frac{73}{b} - 1$$

a poznatku, že 73 je prvočíslo.]

N3. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{4n+1}{2n-3}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{1,2,5\}$. Z úpravy

$$\frac{4n+1}{2n-3} = \frac{2(2n-3)+7}{2n-3} = 2 + \frac{7}{2n-3}$$

vidíme, že hledáme právě ta n, pro která je celé (třeba i záporné) číslo $2n-3$ dělitelem čísla 7, tj. jedním z čísel ± 1, ± 7. Některé z rovnic $2n-3=\pm 1$, $2n-3=\pm 7$ vyhovují právě hodnoty $n \in \{-2,1,2,5\}$, z nichž záporné $n=-2$ musíme kvůli zadání vyloučit.]

D1. Rozhodněte, pro která přirozená čísla n nabývá zlomek

$$\frac{n+72}{2n}$$

celočíselné hodnoty. [$n \in \{8,24,72\}$. Daný zlomek má celočíselnou hodnotu k, právě když platí $n+72=2nk$ neboli $72=n(2k-1)$. Odtud vidíme, že celé číslo $2k-1$ je kladné a že je to lichý dělitel čísla 72. Proto $2k-1 \in \{1,3,9\}$ a rovnost $72=n(2k-1)$ je pak splněna pro tři výše uvedená n.]

D2. Každý zlomek ze zadání soutěžní úlohy, který *nenabývá* celočíselné hodnoty, zkrátíme na zlomek v základním tvaru. Určete všechny ty původní zlomky, které po zkrácení budou mít jmenovatel rovný 2. [$\frac{2018}{4}$, $\frac{2010}{12}$ a $\frac{674}{1348}$. Budou to právě zlomky s jmenovatelem $2k$ pro vhodné k od 1 do 1011, jejichž čitatel $2022-2k$ je dělitelný číslem k, ne však číslem $2k$. Ekvivalentně vyjádřeno: Číslo 2022 je dělitelné číslem k, ne však číslem $2k$. Hledáme tedy ta k od 1 do 1011, která dělí číslo 2022, nedělí však číslo 1011. Jsou to zřejmě pouze *sudá* čísla 2, 6 a 674, kterým odpovídají tři úvodem vypsané zlomky.]

2. *Šebestová má z pětiminutovek průměr známek přesně* 1,12*. Dokažte, že z nich má aspoň* 22 *jedniček. (Možné známky jsou* 1, 2, 3, 4, 5*.)* (Josef Tkadlec)

Řešení. Nejdříve vysvětlíme, proč více než polovina známek Šebestové jsou jedničky. Vyjdeme ze zřejmého poznatku, že pokud některou známku nahradíme lepší známkou, průměr známek se také zlepší. Kdyby proto jedniček byla nejvýše polovina, tak bychom po případném nahrazení známek 3, 4, 5 (pokud nějaké existují) lepšími dvojkami dostali průměr alespoň 1,5, tedy horší než 1,12. Jedniček tedy skutečně musí být více než polovina ze všech známek.

Označme nyní s součet všech známek Šebestové a p jejich počet. Z rovnosti $s/p = 1{,}12 = 28/25$ vzhledem k nesoudělnosti čísel 25 a 28 plyne, že p je násobek čísla 25. Kdyby tudíž platilo $p > 25$, měli bychom $p \geqq 50$, a tak by jedniček bylo (podle prvního odstavce) více než 25. Zbývá proto posoudit případ, kdy $p = 25$ a $s = 28$. Kdyby přitom jedniček bylo nejvýše 21, byl by počet horších známek aspoň $25 - 21 = 4$, a tak by platilo $s \geqq 21 + 4 \cdot 2 = 29$, a to je spor. Proto i v případě $p = 25$ muselo jedniček být alespoň 22.

Poznámka. I když to zadání úlohy nevyžaduje, ukažme, že Šebestová mohla mít z pětiminutovek *právě* 22 jedniček, a to v jediném případě, kdy kromě nich měla už jen 3 dvojky. Zachovejme označení našeho řešení. Podle něho v případě 22 jedniček muselo být $p = 25$ a $s = 28$, takže známky horší než 1 byly právě tři a jejich součet byl $28 - 22 = 6$, tj. šlo o tři dvojky.

Jiné řešení. Označme počet jedniček, dvojek, …, pětek postupně a, b, c, d, e. Pak platí

$$\frac{1a + 2b + 3c + 4d + 5e}{a + b + c + d + e} = 1{,}12 = \frac{112}{100} = \frac{28}{25}. \tag{1}$$

Poslední zlomek v (1) je v základním tvaru, takže čísla z prvního zlomku mají nutně vyjádření

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c + 4d + 5e &= 28k, \\ a + b + c + d + e &= 25k \end{aligned} \tag{2}$$

pro vhodné přirozené číslo k. Z těchto dvou rovností vyloučíme hodnotu b, a to tak, že od dvojnásobku druhé rovnice odečteme první rovnici. Dostaneme

$$2(a + b + c + d + e) - (a + 2b + 3c + 4d + 5e) = 2 \cdot 25k - 28k,$$

odkud po úpravě vychází

$$a = 22k + c + 2d + 3e. \tag{3}$$

Jsme prakticky hotovi, neboť díky zřejmé nerovnosti $c + 2d + 3e \geqq 0$ (čísla c, d, e jsou totiž nezáporná) z odvozené rovnosti (3) již plyne $a \geqq 22k \geqq 22$. Opět také vidíme, že rovnost $a = 22$ nastane, právě když bude platit $k = 1$ a $c + 2d + 3e = 0$, tj. $c = d = e = 0$; po dosazení do kterékoli z rovnic v (2) pak vyjde $b = 3$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pažout dostal z desetiminutovek osmkrát známku 5, šestkrát známku 4, čtyřikrát známku 3 a dvakrát známku 2. Kolik by k tomu ještě musel dostat jedniček, aby se průměr jeho známek zlepšil přesně o 1 stupeň? [10. Potřebný počet jedniček označme n. Protože původní průměr má hodnotu

$$\frac{8\cdot 5+6\cdot 4+4\cdot 3+2\cdot 2}{8+6+4+2}=\frac{80}{20}=4,$$

po přidání n jedniček má být roven 3, tj. má platit

$$\frac{8\cdot 5+6\cdot 4+4\cdot 3+2\cdot 2+n\cdot 1}{8+6+4+2+n}=\frac{80+n}{20+n}=3.$$

Řešením rovnice $80+n=3(20+n)$ dostaneme $n=10$.]

N2. Horáček dostal z desetiminutovek nejprve třikrát známku 2, další jeho známky už byly pouze pětky. Kolik jich dostal, byl-li průměr jeho známek horší než 4,2? [Aspoň 9. Počet pětek označme n. Má platit

$$\frac{3\cdot 2+n\cdot 5}{3+n}=\frac{5n+6}{n+3}>4{,}2=\frac{21}{5}.$$

Úpravou nerovnice $(5n+6)\cdot 5>21\cdot(n+3)$ dostaneme $4n>33$, takže $n\geqq 9$.]

N3. Čermáková měla z desetiminutovek, kterých bylo méně než 15, průměr známek přesně 1,75. O kolik známek mohlo jít? [4, 8 nebo 12. Označme p počet známek a s jejich součet. Platí

$$\frac{s}{p}=1{,}75=\frac{175}{100}=\frac{7}{4}.$$

Protože poslední zlomek je v základním tvaru, musí být $s=7k$ a $p=4k$ pro vhodné přirozené číslo k. Podle zadání připadají v úvahu pouze hodnoty k rovné 1, 2 a 3.]

N4. Mach tvrdí, že kdyby z další desetiminutovky dostal známku 1, vylepšil by si tak průměr z přesně 1,15 na přesně 1,12. Je to možné? [Není. Při průměru $1{,}15=\frac{23}{20}$ by byl počet známek p násobkem čísla 20, při novém průměru $1{,}12=\frac{28}{25}$ by byl počet známek $p+1$ násobkem čísla 25. Obě čísla p a $p+1$ však nemohou být současně násobky pěti. Jiný postup: Při počtu známek p s průměrem 1,15 by byl jejich součet $1{,}15p$, po obdržení nové jedničky by pak mělo platit

$$\frac{1{,}15p+1}{p+1}=1{,}12.$$

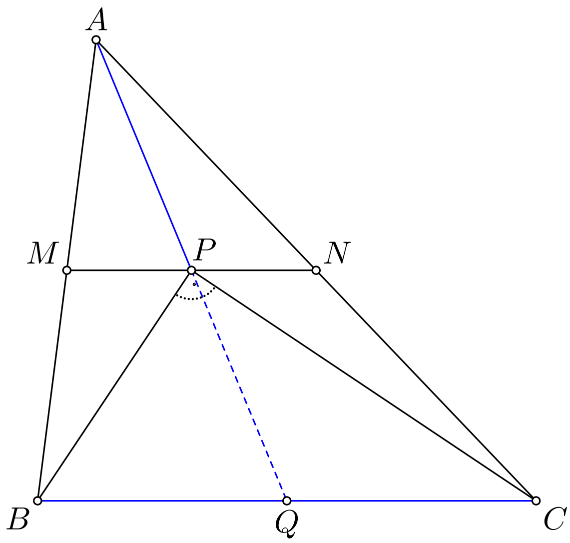
Tato rovnice má sice řešení $p=4$, odpovídá mu však původní součet známek $1{,}15p=4{,}6$, což není celé číslo.]

D1. Kropáček měl z několika desetiminutovek průměr známek přibližně 3,14 (zaokrouhleno na setiny). Mohlo jít o osm známek? [Ne. Označme p počet známek a s jejich součet. Hodnota podílu s/p leží v intervalu $\langle 3{,}135; 3{,}145)$, takže celé číslo s leží v intervalu $\langle 3{,}135p; 3{,}145p)$. Pro $p=8$ však jde o interval $\langle 25{,}08; 25{,}16)$.]

3. *V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB, N střed strany AC a P střed úsečky MN. Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.*

(Patrik Bak, Eliška Macáková)

Řešení. Označme ještě Q průsečík přímky AP s úsečkou BC. Obrázek nám napovídá, že P je střed úsečky AQ a Q je střed úsečky BC. Odložme na chvíli důkaz těchto dvou faktů a ukažme nejdříve, jak z nich plyne tvrzení úlohy.



Předpokládejme tedy, že platí rovnosti $|MN| = |BQ| = |CQ|$ a $|AP| = |PQ|$. Podle zadání úlohy platí ovšem také rovnost $|MN| = |AP|$. Dohromady tak dostáváme, že úsečky BQ, CQ a PQ jsou shodné. Bod P proto leží na té kružnici se středem v bodě Q, jejímž průměrem je úsečka BC. Podle Thaletovy věty to už znamená, že úhel BPC je skutečně pravý.

Jak jsme slíbili, ukážeme nyní, že skutečně P je střed úsečky AQ a Q je střed úsečky BC. Úsečka MN je střední příčka trojúhelníku ABC, tudíž $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$ (viz návodnou úlohu N1). Díky $MN \parallel BC$ je trojúhelník ABQ podobný trojúhelníku AMP podle věty *uu*. Pro délky stran těchto podobných trojúhelníků tak z rovnosti $|AB| = 2 \cdot |AM|$ plynou další dvě rovnosti $|AQ| = 2 \cdot |AP|$ a $|BQ| = 2 \cdot |MP|$. Podle první z nich je P střed AQ; z druhé rovnosti $|BQ| = 2 \cdot |MP|$, ve které $2 \cdot |MP| = |MN| = \frac{1}{2}|BC|$, plyne $|BQ| = \frac{1}{2}|BC|$, což znamená právě to, že Q je střed BC, jak jsme chtěli ukázat. (O využití podobných trojúhelníků v obecnější situaci pojednává návodná úloha N2.)

Poznámka. Popišme kratší způsob jak ukázat, že P je střed úsečky AQ a Q je střed úsečky BC. Označíme-li Q' střed strany BC, pak z vlastností středních příček MQ' a NQ' trojúhelníku ABC plyne, že čtyřúhelník $AMQ'N$ je rovnoběžník. Jeho úhlopříčky MN a AQ' se tudíž navzájem půlí, takže se protínají v bodě P (který je totiž zadán jako střed úsečky MN). Odtud plyne, že úsečka AQ' prochází bodem P, a tak je nutně $Q' = Q$, tj. Q je střed strany BC a P jakožto střed úhlopříčky AQ' je středem úsečky AQ. (Dodejme, že potřebné vlastnosti bodů P a Q lze okamžitě získat užitím geometrického zobrazení, kterému říkáme *stejnolehlost* se středem A a koeficientem 2.)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Užitím podobných trojúhelníků odvoďte známou vlastnost středních příček obecného trojúhelníku ABC: *Je-li M střed strany AB a N střed strany AC, pak $MN \parallel BC$ a $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.* [Jelikož $|AM| : |AB| = |AN| : |AC| = 1 : 2$, jsou trojúhelníky ABC a AMN podobné podle věty *sus*. Ze shodnosti jejich úhlů ABC a AMN pak plyne $MN \parallel BC$ a díky podobnostnímu poměru $1 : 2$ platí rovněž $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.]

N2. Jsou dány rovnoběžky p, q a bod S, který na nich neleží. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C. Průsečíky přímky q s přímkami SA, SB, SC jsou označeny po řadě D, E, F. Dokažte rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|SA|}{|SD|} = \frac{|SB|}{|SE|} = \frac{|SC|}{|SF|}.$$

[Díky shodnosti vrcholových a souhlasných či střídavých úhlů jsou podle věty *uu* navzájem podobné trojúhelníky SAB a SDE, stejně jako trojúhelníky SAC a SDF, jakož i trojúhelníky SBC a SEF. Díky stranám těchto trojúhelníků se společným krajním bodem S mají všechny tři podobnosti stejný koeficient rovný posledním třem zlomkům v dokazované sérii rovností; první tři zlomky vyjadřují tento koeficient pro strany protější k vrcholu S dotyčných trojúhelníků.]

N3. Připomeňte si Thaletovu větu a užijte ji k důkazu tvrzení: *Osa pravého úhlu v různostranném pravoúhlém trojúhelníku půlí úhel mezi jeho výškou k přeponě a těžnicí k přeponě.* [Nechť v trojúhelníku ABC platí $\gamma = 90°$ a $\beta < \alpha$, tj. $\beta < 45°$. Označme C_1 střed přepony AB a C_0 patu výšky z vrcholu C. Podle Thaletovy věty v trojúhelníku C_1CB platí $|C_1C| = |C_1B|$, tudíž $|\sphericalangle BCC_1| = |\sphericalangle C_1CB| = \beta$. V pravoúhlém trojúhelníku ACC_0 zase máme $|\sphericalangle ACC_0| = 90° - |\sphericalangle C_0CA| = 90° - \alpha = \beta$. Úhly BCC_1 a ACC_0, které leží v pravém úhlu ACB, tak mají tutéž velikost $\beta < 45°$, a proto se nepřekrývají, a tak osa celého úhlu ACB je současně i osou souměrnosti jeho „zbylé" části mezi úhly BCC_1 a ACC_0, tj. osou úhlu C_1CC_0.]

D1. Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ, body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$. [C–55–S–2]

D2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k. [C–51–S–2]

D3. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označíme P průsečík os vnitřních úhlů u vrcholů A, D a Q průsečík os vnitřních úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že body P a Q leží na téže rovnoběžce se základnami lichoběžníku. [Střed M ramene AD leží na ose o pásu mezi rovnoběžkami AB a CD. Protože součet úhlů BAD a ADC je díky $AB \parallel CD$ roven $180°$, součet polovičních úhlů PAD a ADP je roven $90°$, tudíž PAD je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AD o středu M. Podle Thaletovy věty je PAM rovnoramenný trojúhelník se základnou PA, tudíž úhel MPA je shodný s úhlem PAM, a tedy i s úhlem PAB. Ze shodnosti (střídavých) úhlů MPA a PAB plyne $MP \parallel AB$, tudíž M leží na ose o. Analogickou úvahou o středu N ramene BC zjistíme, že na ose o leží také bod Q.]

4. *Mach hraje následující hru. Na začátku je na stole k hromádek, na nichž je postupně $1, 2, 3, \ldots, k$ žetonů. V každém tahu vybere libovolné dvě hromádky a odstraní z obou stejný počet žetonů. Jeho cílem je, aby na stole zůstal jediný žeton. Může se mu to podařit a) pro $k = 10$, b) pro $k = 11$?* (Radek Horenský)

Řešení. Označme P celkový počet žetonů v hromádkách na stole a vyjádřeme, jak se aktuální hodnota P po každém tahu změní. Podle zadání Mach v každém tahu odstraní ze dvou hromádek stejný počet žetonů, který označíme p (hodnota p přitom závisí na daném tahu). Celkový počet P žetonů se tak tímto tahem sníží o hodnotu $2p$, tedy na počet $P - 2p$. Protože číslo $2p$ je sudé pro každé celé p, v případě sudého P bude i $P - 2p$ sudé, v případě lichého P bude i $P - 2p$ liché. Počet žetonů na stole tak po libovolném počtu tahů nezmění svoji *paritu* (tímto termínem označujeme „sudost“ či „lichost“ daného čísla).*

Určeme nyní paritu P v obou zadaných případech.

a) Pro $k = 10$ máme $P = 1 + 2 + \ldots + 10 = 55$, což je liché číslo, takže naše předchozí úvaha nevylučuje možnost, že po určitém počtu tahů zůstane na stole jediný žeton. Toho může Mach snadno dosáhnout například takto: Nejdříve hromádky spáruje do 5 dvojic o počtech žetonů $(1, 2)$, $(3, 4), \ldots, (9, 10)$ a provede 5 tahů, kdy z hromádek $(j, j + 1)$ odstraní po j žetonech pro $j = 1, 3, \ldots, 9$. Zůstane mu pak pouze pět „hromádek“ po 1 žetonu, pak už čtyři z nich zřejmě odstraní na dva tahy.

b) Pro $k = 11$ máme $P = 1 + 2 + \ldots + 10 = 66$, což je číslo sudé. Podle naší úvahy bude počet žetonů po libovolném počtu tahů sudý, takže nikdy na stole nezůstane jediný žeton.

Závěr. V případě a) se to Machovi může podařit, v případě b) nikoli.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Šebestová roztrhla list papíru na tři kousky, poté některé z těchto kousků opět roztrhla každý na tři kousky, atd. Rozhodněte, které počty kousků 4, 5, 6, …, 20 mohla tímto postupem získat. [Liché počty 5, 7, …, 19. Celkový počet kousků se každým roztržením jednoho z nich zvětší o 2, takže zůstává lichý jako na počátku.]

N2. Na tabuli je napsáno a) 5 písmen R a 5 písmen S, b) 25 písmen R a 30 písmen S. V každém kroku smažeme dvě napsaná písmena a nahradíme je písmenem R, resp. S, byla-li smazaná písmena různá, resp. stejná. Které písmeno zůstane na tabuli poslední? [Písmeno R v obou případech a) a b). Počet písmen R se po každém kroku buďto nezmění (smažeme-li dvě S či po jednom R a S), nebo se zmenší o 2 (smažeme-li dvě R), takže zůstane po každém počtu kroků lichý, a proto nikdy neklesne na nulu. Protože se po jednom kroku celkový počet písmen na tabuli sníží o 1, po konečném počtu kroků zůstane na tabuli jako poslední písmeno R.]

N3. Na tabuli jsou napsány 3 jedničky, 4 dvojky a 3 trojky. V každém kroku je povoleno smazat libovolné dvě různé číslice a připsat místo nich zbývající třetí číslici. Po sérii takových úprav se nám podařilo dojít k situaci, kdy na tabuli zůstala jediná číslice, a to dvojka. Mohlo se stát, že při jiném průběhu úprav bychom došli k jiné jediné číslici, tj. k jedničce nebo trojce? Změní se odpověď při jiných výchozích počtech číslic? [Nemohlo se to stát, ani při jiných výchozích počtech. Zkoumejme aktuální součet S všech číslic na tabuli. Při záměně $(1, 2) \to 3$ se S nezmění, při záměně $(1, 3) \to 2$ se S zmenší o 2, konečně

* Říkáme, že parita celkového počtu žetonů je *invariantem* prováděných úprav.

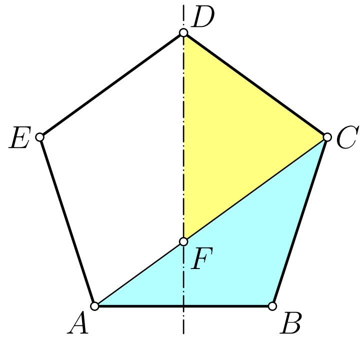
při záměně $(2, 3) \to 1$ se S zmenší o 4. Vidíme, že S nemění svou paritu. Nemůžeme tedy z téhož výchozího stavu někdy dojít k jediné sudé číslici, jindy k jediné liché číslici.]

D1. Na tabuli jsou napsána přirozená čísla od 1 do 100. V každém kroku smažeme trojici po sobě jdoucích čísel (existuje-li taková trojice). Mohou na tabuli zůstat nakonec čísla, jejichž celkový součet bude 111? [Ne. Součet tří po sobě jdoucích čísel $(n-1)+n+$ $+(n+1)=3n$ je dělitelný třemi, takže součet čísel na tabuli po každém kroku klesne o násobek tří; jeho zbytek při dělení třemi se tudíž nezmění. Na začátku máme součet $1+2+\ldots+100=5050$ se zbytkem 1 při dělení třemi, číslo 111 však má zbytek 0.]

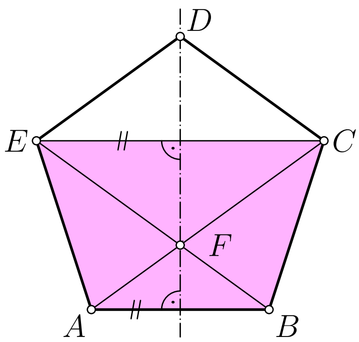
D2. Vraťme se k situaci z úlohy N3 s obecnými výchozími počty číslic. Rozhodněte, zda je možné, abychom dvěma odlišnými postupy úprav došli jednou k jediné číslici 1 a podruhé k jediné číslici 3. [Možné to není. Přeznačme číslice 1, 2, 3 za písmena A, B, C v jakémkoli pořadí – povolené úpravy to nijak neovlivní. Proto negativní odpověď k D2 plyne z výsledku N3. Jinak lze společné řešení N3 a D2 podat takto: označit počet jedniček, dvojek a trojek na tabuli po řadě j, d, t a ukázat, že při úpravách nemění paritu žádný ze tří součtů $j+d$, $j+t$ a $d+t$. Dodejme, že v řešení N3 jsme využili paritu součtu $j+2d+3t$, která je stejná jako parita součtu $j+t$.]

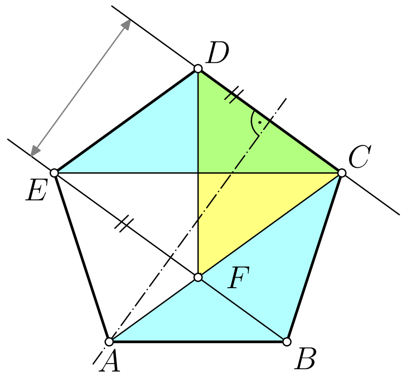
5. *Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F. Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah.*

(David Hruška)



Řešení. Podle návodné úlohy N1 uvažme souměrnost $ABCDE$ podle té jeho osy, která prochází vrcholem D (viz obrázek vlevo). Návodná úloha N2 nám přitom říká, že je to osa souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku $ABCE$ se základnami AB a CE. Průsečík jeho úhlopříček AC a BE proto leží na ose základny AB, je tudíž bodem F ze zadání úlohy.





Víme tedy, že bod F leží na úhlopříčce BE. Ta je však rovnoběžná se stranou CD, a to díky souměrnosti $ABCDE$ podle jeho osy, která tentokrát prochází vrcholem A (viz obrázek vpravo). Body F a E tak mají od přímky CD stejnou vzdálenost, a proto trojúhelník CDF má stejný obsah jako trojúhelník CDE, který je ale shodný s trojúhelníkem ABC. Tím je rovnost obsahů trojúhelníků ABC a CDF dokázána.

Poznámka. V druhém odstavci řešení jsme mohli postupovat jinak: Podobně jako $BE \parallel CD$ platí rovněž $AC \parallel ED$ (ze souměrnosti $ABCDE$ podle jeho osy jdoucí vrcholem B), takže $CDEF$ je rovnoběžník (dokonce kosočtverec, neboť $|CD| = |DE|$), tudíž obsahy obou trojúhelníků CDF a CDE jsou stejné – rovnají se totiž polovině obsahu zmíněného rovnoběžníku.

Návodné a doplňující úlohy:

Připomeňme, že pravidelný pětiúhelník je konvexní pětiúhelník, které má shodné všechny strany i všechny vnitřní úhly.

N1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ narýsujeme osy všech jeho stran a osy všech jeho úhlopříček. Kolik různých přímek to bude? Vysvětlete, proč každá z nich je osou souměrnosti celého pětiúhelníku a prochází jedním jeho vrcholem. [Pět přímek. Stačí ukázat, že například strana AB a úhlopříčka CE mají společnou osu, která prochází zbylým pátým vrcholem D. Vyjdeme z toho, že BCD, CDE a DEA jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky s hlavními vrcholy po řadě C, D, E. Odvodíme, že osa úhlu CDE je společnou osou úseček CE a AB: Pro první z nich to plyne z rovnoramenného trojúhelníku CDE, pro druhou z trojúhelníku BDA, který je rovněž rovnoramenný, neboť díky shodným trojúhelníkům BCD a DEA platí $|BD| = |DA|$ a navíc $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle EDA|$.]

N2. Dokažte, že každé čtyři vrcholy pravidelného pětiúhelníku tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku. [Plyne to z řešení N1: Ukázali jsme tam, že osa souměrnosti celého pětiúhelníku procházející vrcholem D je společnou osou úseček AB a CE, takže to jsou základny rovnoramenného lichoběžníku $ABCE$ – druhé dvě protější strany BC a EA jsou totiž shodné, ne však rovnoběžné (díky tupým úhlů ABC a BAE).]

N3. Rovnoběžné úsečky KL a MN neleží na jedné přímce. Dokažte, že trojúhelníky KLM a KLN mají stejný obsah. [Z podmínky $KL \parallel MN$ plyne, že výšky ke společné straně KL obou trojúhelníků KLM a KLN jsou shodné. Pro ně tak do vzorce $S = \frac{1}{2}zv$ pro obsah obecného trojúhelníku dosadíme stejné hodnoty z a v.]

D1. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme G průsečík úhlopříček AC a BD. Dokažte, že čtyřúhelník $AGDE$ je kosočtverec. [Z lichoběžníků $ACDE$ a $BDEA$ (viz výsledek N2) plyne $AG \parallel DE$ a $GD \parallel EA$, takže $AGDE$ je rovnoběžník; díky $|DE| = |EA|$ jde skutečně o kosočtverec.]

D2. Dokažte, že dvě úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které vycházejí z jednoho jeho vrcholu, rozdělují příslušný vnitřní úhel na třetiny. [Stačí ukázat, že v pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ jsou shodné tři úhly s vrcholem A, totiž BAC, CAD a DAE. Vnitřní úhly pravidelného pětiúhelníku mají velikost $3 \cdot 180° : 5 = 108°$. Proto úhly při základnách rovnoramenných trojúhelníků ABC a DEA mají velikost $(180° - 108°) : 2 = 36°$. Vidíme, že oba úhly BAC a DAE mají ve srovnání s úhlem BAE třetinovou velikost (neboť $36 : 108 = 1 : 3$), takže třetinovou velikost má i třetí úhel CAD. (Dodejme, že z vlastností tzv. *středových* a *obvodových úhlů* v kružnici plyne následující tvrzení pro libovolné $n \geqq 4$: Všechny úhlopříčky pravidelného n-úhelníku vycházející z jednoho jeho vrcholu dělí jemu příslušný vnitřní úhel na $n - 2$ shodných částí.)]

D3. Označme a délku strany a u délku úhlopříčky daného pravidelného pětiúhelníku. Dokažte rovnost $a^2+au = u^2$. [V pravidelném pětiúhelníku $ABCD$ označme G průsečík úhlopříček AC a BD. Podle úlohy N2 je $DABC$ rovnoramenný lichoběžník ($DA \parallel BC$), takže trojúhelníky DAG a BCG jsou podle věty *uu* podobné. Platí proto $|DA| : |BC| = |DG| : |GB|$ neboli $u : a = |DG| : |GB|$. Podle úlohy D1 je $AGDE$ kosočtverec o straně a, takže platí $|DG| = a$ a $|GB| = |BD| - |DG| = u - a$. Dosazením do $u : a = |DG| : |GB|$ dostaneme $u : a = a : (u - a)$, odkud už snadno plyne rovnost $a^2 + au = u^2$. (Úměra $u : a = a : (u - a)$ znamená, že bod G dělí každou z úhlopříček AC a BD v tzv. *zlatém řezu*.)]

6. *Určete největší přirozené číslo* $n \geqq 10$ *takové, že pro libovolných* 10 *různých čísel z množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *platí následující tvrzení: Není-li ani jedno z těchto* 10 *čísel prvočíslem, pak je součet některých dvou z nich prvočíslem.* (Ján Mazák)

Řešení. Ukážeme, že hledané největší n je rovno 21.

Nejdříve ověříme, že požadovanou vlastnost nemá žádné přirozené číslo $n \geqq 22$. Pro každé takové n jsou v dotyčné množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ zastoupena sudá čísla 4, 6, 8, …, 22, která nejsou prvočísla (kvůli tomu jsme vynechali nejmenší sudé číslo 2) a kterých je požadovaný počet $(22 - 4) : 2 + 1 = 10$. Protože ani součet žádných dvou z 10 vypsaných čísel nebude prvočíslem (opět půjde o sudé číslo větší než 2), tvrzení úlohy pro těchto 10 čísel neplatí. Proto skutečně nevyhovuje žádné $n \geqq 22$.

Nyní dokážeme, že $n = 21$ požadovanou vlastnost má. Pokud vybereme z množiny $\{1, 2, \ldots, 21\}$ libovolných (dále pevných) 10 různých čísel, mezi nimiž není žádné prvočíslo (jinak není co dokazovat), vybereme vlastně 10 různých čísel z množiny $M = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21\}$. Rozdělíme ji pro další účely na skupinu lichých čísel a skupinu sudých čísel:

$$L = \{1, 9, 15, 21\} \qquad \text{a} \qquad S = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}.$$

Vidíme, že L má 4 prvky a S má 9 prvků. Odtud plyne, že mezi 10 vybranými čísly je aspoň jedno číslo z L $(10 - 9 = 1)$ a aspoň 6 čísel z S $(10 - 4 = 6)$, tedy z S nejsou vybrána nejvýše 3 čísla $(9 - 6 = 3)$. Jinak řečeno, z libovolných čtyř čísel z S je aspoň jedno vybráno.

Rozlišíme nyní, které z lichých čísel 1, 9, 15, 21 je vybráno (půjde o diskuzi čtyř případů, které se navzájem nemusí nutně vylučovat).

- ▷ Vybráno je číslo 1. Protože $1 + 4$, $1 + 6$, $1 + 10$, $1 + 16$ jsou prvočísla a *aspoň jedno ze čtyř* sudých čísel 4, 6, 10, 16 musí být vybráno (podle závěru předchozího odstavce), tvrzení úlohy pro vybraných 10 čísel platí.
- ▷ Vybráno je číslo 9. Podobně jako výše využijeme čtyři součty $9 + 4$, $9 + 8$, $9 + 10$, $9 + 14$.
- ▷ Vybráno je číslo 15. Tentokrát uplatníme čtyři součty $15 + 4$, $15 + 8$, $15 + 14$, $15 + 16$.
- ▷ Vybráno je číslo 21. V tomto případě vhodné čtyři součty jsou $21 + 8$, $21 + 10$, $21 + 16$, $21 + 20$.

Poznámka. Existuje mnoho jiných způsobů jak ukázat, že při výběru libovolných 10 různých čísel z množiny

$$M = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21\}$$

bude součet některých dvou vybraných čísel roven prvočíslu. Obvykle je při nich nutné rozebrat více případů než v našem řešení, avšak jeden rafinovaný postup žádný rozbor v podstatě nevyžaduje, a proto jej nyní popíšeme.

Rozdělme celou množinu M na 9 navzájem disjunktních podmnožin

$$\{1, 4\},\ \{6\},\ \{8, 9\},\ \{10\},\ \{12\},\ \{14, 15\},\ \{16\},\ \{18\},\ \{20, 21\}.$$

Jelikož podmnožin je 9, při výběru libovolných 10 různých čísel z množiny M musí být zřejmě vždy vybrána obě čísla z některé dvouprvkové podmnožiny. Pro každou z nich je však součtem jejích prvků prvočíslo.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Ukažte, že z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ lze vybrat 4 různá čísla tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. Najděte rovněž všechny takové výběry. [Vyhovující výběr 4, 6, 8, 10 je jediný. Musí jít o 4 čísla z množiny $\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, která má 6 prvků. Číslo 1 nemůže být ve výběru s třemi čísly 4, 6 a 10, proto je „nepoužitelné“. Totéž platí i pro číslo 9 kvůli podobné „kolizi“ s třemi čísly 4, 8 a 10. V úvahu tak připadají pouze čtyři sudá čísla 4, 6, 8 a 10. Jejich výběr vyhovuje, protože součet každých dvou z nich je rovněž sudé číslo různé od 2.]

N2. Ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ vybrat $n-1$ čísel tak, aby mezi nimi nebylo žádné prvočíslo ani dvě čísla, jejichž součet je prvočíslem. [Výběr bude mít požadovanou vlastnost, bude-li například sestaven ze sudých složených čísel. Splňuje to výběr $n-1$ čísel $4, 6, 8, \ldots, 2n$.]

D1. Ukažte, že počet všech šestimístných prvočísel nepřevyšuje 300 000. [Šestimístná jsou čísla od 100 000 do 999 999, je jejich celkem 900 000. Stačí tedy ukázat, že alespoň 600 000 z nich je dělitelných dvěma nebo třemi. Dělitelných dvěma je jich 450 000, dělitelných třemi 300 000. V součtu $450\,000 + 300\,000 = 750\,000$ jsou ovšem započítána dvakrát čísla, která jsou dělitelná dvěma i třemi, tj. čísla dělitelná šesti. Těch je 150 000, takže dvěma nebo třemi je dělitelných právě $750\,000 - 150\,000 = 600\,000$ šestimístných čísel. Poznámka: Podobně zjistíme, že existuje 660 000 šestimístných složených čísel, která jsou dělitelná 2, 3 nebo 5, tudíž počet šestimístných prvočísel nepřevyšuje 240 000. I tento odhad je však velice hrubý – přesný počet šestimístných prvočísel je 68 906.]

D2. Najděte největší trojmístné číslo, z něhož po vyškrtnutí libovolné číslice dostaneme prvočíslo. [Číslo 731, viz 67–C–S–1]

D3. Kolik nejvýše čísel lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$ tak, aby rozdíl žádných dvou vybraných čísel nebyl roven prvočíslu? [505 čísel, viz 67–B–II–4]