72. ročník Matematické olympiády (2022/2023)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie B

1. Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme D počet těch vyplnění, kde je navíc *součin* čísel v některém řádku nebo sloupci násobkem deseti. Určete poměr $D : M$ a výsledek zapište pomocí poměru či podílu dvou nesoudělných přirozených čísel.

2. Je dán čtverec $ABCD$. Na polopřímce opačné k CB leží bod E tak, že platí $|BC| = |CE|$. Označme F střed strany BC a X kolmý průmět bodu E na přímku AF. Dokažte, že bod C je středem kružnice vepsané trojúhelníku AEX.

3. Nechť a, b jsou kladná celá čísla taková, že $a^2 - b^2$ je mocninou dvojky. Dokažte, že $a^2 + b^2$ je součtem dvou mocnin dvojky. (Mocninami dvojky rozumíme čísla 2^0, 2^1, $2^2, \ldots$)

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

v úterý 24. ledna 2023

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme D počet těch vyplnění, kde je navíc* součin *čísel v některém řádku nebo sloupci násobkem deseti. Určete poměr $D : M$ a výsledek zapište pomocí poměru či podílu dvou nesoudělných přirozených čísel.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Úlohu započneme řešit výpočtem rozdílu $M - D$, tedy počtu *špatných* vyplnění, u kterých součin čísel v žádném řádku ani sloupci tabulky není násobkem deseti. To nastane právě tehdy, když s číslem 5 není ve stejném řádku ani sloupci žádné sudé číslo.

Před slíbeným výpočtem nejprve ilustrujme situaci příkladem jednoho typu špatného vyplnění. Pozice pro čtyři sudá čísla 2, 4, 6, 8 a čtyři lichá čísla 1, 3, 7 a 9 označíme písmeny s, resp. l:

s	l	s
s	l	s
l	5	l

Umístění čísla 5 pro špatné vyplnění můžeme zvolit devíti způsoby. Při každém z nich pak všechna čtyři sudá čísla 2, 4, 6, 8 musí ležet v polích mimo řádek i sloupec umístěného čísla 5. Taková pole jsou právě čtyři a na ně mohou být sudá čísla rozmístěna jakkoli, tedy 4! způsoby. Máme-li takové rozmístění vybráno, pak čísla 1, 3, 7, 9 mohou být na zbylá čtyři dosud neobsazená pole také rozmístěna jakkoli, tedy opět 4! způsoby. Celkový počet $M - D$ špatných vyplnění tak má hodnotu

$$M - D = 9 \cdot 4! \cdot 4!.$$

Protože navíc zřejmě platí $M = 9!$, dohromady dostáváme

$$1 - \frac{D}{M} = \frac{M-D}{M} = \frac{9 \cdot 4! \cdot 4!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{70}, \quad \text{odkud} \quad \frac{D}{M} = 1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70}.$$

Závěr. Hledaný poměr $D : M$ je roven $69 : 70$.

Poznámka. Po úvaze z prvního odstavce lze přejít k ekvivalentní úloze o vyplňování tabulky 3×3 jedním číslem 5, čtyřmi písmeny l a čtyřmi písmeny s. Pro odpovídající hodnoty M' a D' přitom platí $M' = 9 \cdot \binom{8}{4}$ a $M' - D' = 9$. Tato obměna však nepřináší oproti původnímu postupu žádnou výhodu, navíc je třeba zmíněnou ekvivalenci doložit rovnostmi $M = (4!)^2 \cdot M'$ a $D = (4!)^2 \cdot D'$.

Jiné řešení. Vyplnění tabulky 3×3 čísly $1, \ldots, 9$ nazveme *lichým*, je-li lichý *součet* tří čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky. V řešení druhé úlohy domácího kola jsme ukázali, že lichá jsou právě ta vyplnění, při kterých lichá čísla $1, 3, \ldots, 9$ zabírají jeden řádek a jeden sloupec tabulky, a že pro počet L všech lichých vyplnění platí vztah $L = M/14$.

Zkoumejme opět vyplnění, která jsme v prvním řešení aktuální úlohy nazvali *špatná*. Tam jsme úvahou o řádku a sloupci s číslem 5 vlastně ukázali, že každé špatné vyplnění je liché. Ne každé liché vyplnění je však špatné, jak ukazuje následující příklad:

s	l	s
s	5	s
l	l	l

Ukažme, že lichých vyplnění je pětkrát více než špatných vyplnění. Skutečně, pro konstrukci lichých vyplnění zvolme nejprve ten řádek a ten sloupec, které budeme vyplňovat lichými čísly. Poté máme pro číslo 5 na výběr pět polí, přitom ke špatnému vyplnění povede jediné z nich. (Po umístění čísla 5 pak pro zbylá 4 lichá čísla a všechna 4 sudá čísla máme vždy stejný počet $4! \cdot 4!$ způsobů, jak je umístit.)* Platí proto $L = 5(M - D)$ neboli $M - D = L/5$, odkud s ohledem na $L = M/14$ dostáváme $M - D = M/70$, tudíž $D = 69M/70$ neboli $D : M = 69 : 70$.

Jiné řešení. V obou předchozích řešeních jsme volili výhodnější postup, kdy se vlastně počítají vyplnění, která zadání úlohy *nevyhovují*. Ukážeme nyní, že je schůdná i náročnější cesta přímého určení počtu vyhovujících vyplnění. Jsou to zřejmě právě ta vyplnění, u kterých se některé sudé číslo nachází ve stejném řádku nebo sloupci tabulky jako číslo 5.

Všechna vyhovující vyplnění rozdělíme do skupin podle toho, kolik je dohromady sudých čísel v tom řádku a v tom sloupci tabulky, ve kterých se nachází číslo 5. Tento počet označíme p a určíme, kolik vyplnění pro jednotlivá možná p od 1 do 4 existuje (jak už víme, počet $p = 0$ mají právě ta vyplnění, která zadání úlohy nevyhovují). Tyto počty zapíšeme vždy ve tvaru součinu, jehož první činitel bude roven 9 (počet způsobů umístění čísla 5) a druhý činitel bude roven počtu výběrů p polí pro sudá čísla sdílející s číslem 5 řádek nebo sloupec; třetí činitel bude roven počtu způsobů vyplnění již vybraných p polí některými sudými čísly a čtvrtý činitel počtu způsobů rozmístění zbylých $4 - p$ sudých čísel do 4 polí mimo řádek a sloupec čísla 5; konečně pátý činitel $4!$ bude roven počtu způsobů vyplnění zbylých 4 polí lichými čísly 1, 3, 7 a 9.

$$
\begin{array}{lcccccl}
p = 1: & 9 \cdot 4 \cdot & 4 & \cdot & (4 \cdot 3 \cdot 2) & \cdot\, 4! & = 9 \cdot (4!)^2 \cdot 16 \\
p = 2: & 9 \cdot 6 \cdot & (4 \cdot 3) & \cdot & (4 \cdot 3) & \cdot\, 4! & = 9 \cdot (4!)^2 \cdot 36 \\
p = 3: & 9 \cdot 4 \cdot & (4 \cdot 3 \cdot 2) & \cdot & 4 & \cdot\, 4! & = 9 \cdot (4!)^2 \cdot 16 \\
p = 4: & 9 \cdot 1 \cdot & 4! & \cdot & 1 & \cdot\, 4! & = 9 \cdot (4!)^2
\end{array}
$$

Celkový počet D vyhovujících vyplnění proto má hodnotu

$$D = 9 \cdot (4!)^2(16 + 36 + 16 + 1) = 9 \cdot (4!)^2 \cdot 69.$$

S ohledem na zřejmou hodnotu $M = 9!$ tak docházíme k výsledku

$$\frac{D}{M} = \frac{9 \cdot (4!)^2 \cdot 69}{9 \cdot 8!} = \frac{4! \cdot 69}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{69}{70}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A0. Uvedení hodnoty $9!$ pro počet M: 0 bodů.

A1. Uvedení příkladu nevyhovujícího vyplnění tabulky (přičemž je zjevné, že řešitel si tuto jeho vlastnost uvědomuje): 1 bod.

B1. Charakterizace *nevyhovujících* vyplnění tabulky (tj. vlastnost rozmístění dalších čísel v závislosti na pozici čísla 5): 3 body.

B2. Určení jedné z hodnot $(M - D)/M$ nebo $M - D$ včetně zdůvodnění: 2 body, 1 bod za správnou metodu s numerickou chybou.

B3. Odpověď zapsaná poměrem $69 : 70$ nebo zlomkem $69/70$: 1 bod.

C1. Uvedení poměru $L : M = 1 : 14$ z řešení úlohy domácího kola spolu s popisem lichých vyplnění (obojí lze prohlásit za známé): 1 bod.

* Absenci tohoto dovětku v závorce lze v řešeních tolerovat.

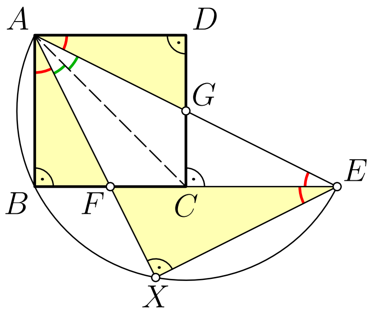
C2. Každé nevyhovující vyplnění je liché: 2 body se zdůvodněním, 1 bod bez zdůvodnění.
C3. Uvedení vztahu $L = 5(M - D)$: 2 body se zdůvodněním, 1 bod bez zdůvodnění.
D1. Charakterizace vyhovujících vyplnění tabulky (tj. vlastnost rozmístění dalších čísel v závislosti na pozici čísla 5): 1 bod.
D2. Rozdělení všech vyhovujících vyplnění do čtyř skupin podle celkového počtu sudých čísel, která sdílejí s číslem 5 stejný řádek nebo sloupec: 1 bod.
D3. Určení hodnoty D včetně zdůvodnění: 3 body, z toho 2 body za úplnost metody kombinatorického počítání a 1 bod za numerickou bezchybnost.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{A1}, \max(\mathrm{B1}+\mathrm{B2}, \mathrm{C1}+\mathrm{C2}+\mathrm{C3}, \mathrm{D1}+\mathrm{D2}+\mathrm{D3})+\mathrm{B3}\bigr)$ bodů.

2. *Je dán čtverec $ABCD$. Na polopřímce opačné k CB leží bod E tak, že platí $|BC| = |CE|$. Označme F střed strany BC a X kolmý průmět bodu E na přímku AF. Dokažte, že bod C je středem kružnice vepsané trojúhelníku AEX.* (David Hruška)

Řešení. Podle obvyklé konstrukce středu vepsané kružnice budeme s důkazem hotovi, když ukážeme, že bod C leží na osách dvou vnitřních úhlů trojúhelníku AEX – těch u vrcholů A a E.

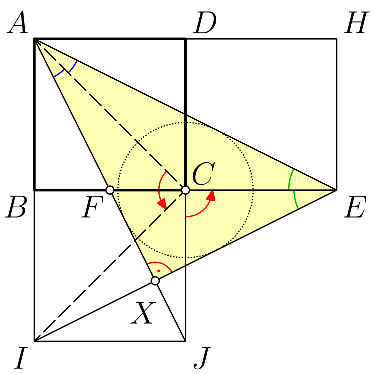
Nejdříve si povšimneme dvou vlastností úsečky AE, jejíž průsečík se stranou CD označíme G: Střídavé úhly DAE a BEA jsou shodné (jak je vyznačeno na obrázku) a bod G je zřejmě středem strany CD.*



Protože F a G jsou středy stran BC, resp. DC, ze souměrnosti čtverce $ABCD$ podle úhlopříčky AC plyne shodnost (podbarvených) trojúhelníků DAG a BAF. Proto je úhel DAG shodný s (třetím červeně vyznačeným) úhlem BAF a díky souměrné sdruženosti bodů F, G podle přímky AC leží bod C skutečně na ose úhlu EAX (jak je na obrázku vyznačeno zeleně).

Nyní si všimněme trojúhelníků BAF a XEF s pravými úhly u vrcholů B a X. Protože se shodují i v úhlu při společném vrcholu F, jsou shodné i jejich třetí úhly BAF a XEF (proto je i úhel XEF na obr. vyznačen červeně).** Dohromady dostáváme shodnost úhlů CEA a CEX, podle níž bod C skutečně leží na ose úhlu XEA. Tím je celý důkaz ukončen.

Jiné řešení. K zadanému čtverci $ABCD$ a určenému bodu E ještě přikreslíme dva další čtverce $DCEH$ a $BIJC$ podle obrázku. Střed F strany BC jistě leží na úsečce AJ.



* Dokázat to lze několika způsoby: úvahou o rovnoběžníku $ACED$ nebo o střední příčce trojúhelníku ABE, případně užitím dvojice shodných trojúhelníků DAG a CEG. Řešitelé ovšem mohou tvrzení považovat, stejně jako my, za zřejmé a nedokazovat je.

** Tuto shodnost můžeme také odvodit pomocí obvodových úhlů BAX a BEX v kružnici nad průměrem AE – ta je totiž opsána čtyřúhelníku $ABXE$, neboť oba úhly ABE a AXE jsou pravé.

Uvažme otočení se středem C a (orientovaným) pravým úhlem DCB. V něm se úsečka AJ zobrazí na k ní kolmou úsečku IE, takže průsečíkem těchto dvou úseček je bod X ze zadání úlohy (kolmý průmět bodu E na přímku AF neboli AJ).

Vlastní tvrzení úlohy dokážeme jako v prvním řešení – ověříme, že bod C leží na osách dvou vnitřních úhlů trojúhelníku AEX.

Protože body J a E jsou souměrně sdružené podle přímky AC, leží bod C na ose úhlu JAE neboli XAE. Podobně ze souměrnosti dvojice bodů A a I podle přímky BE plyne, že její bod C leží na ose úhlu AEI neboli AEX. Tím je slíbený důkaz hotov.

Poznámky.

1. Ukažme, že otočení se středem C, které jsme využili v první části řešení, lze uplatnit i k jinému důkazu pro druhou část. V tomto otočení totiž kromě $AJ \to IE$ platí rovněž $AE \to ID$. Proto existují dvě kružnice se středem C: té první se dotýkají úsečky AJ a IE, té druhé zase úsečky EA a ID. Úsečky ID a IE však jsou souměrně sdružené podle přímky IC, tudíž obě zmíněné kružnice splývají v jednu, která je proto vepsána trojúhelníku AEX.
2. Kvůli pokynům k bodování dodejme, že obě části podaného řešení jsme mohli uvést v opačném pořadí: nejprve označit průsečík úseček EI, JA jako X' a ukázat, že bod C je středem kružnice vepsané trojúhelníku AEX', teprve pak odvodit rovnost $X' = X$.

Jiné řešení. Ukažme, jak lze myšlenky z obou předešlých řešení stručně podat užitím základních poznatků o směrnicích přímek z analytické geometrie.

Uvažme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem A a kladnými poloosami po řadě AB a AD. V ní má přímka AF směrnici $|BF|/|AB| = 1/2$, zatímco přímka AE má směrnici $|BE|/|AB| = 2$. Jelikož tyto dvě směrnice jsou navzájem převrácená čísla, přímky AF a AE jsou souměrně sdružené podle osy prvního kvadrantu, kterou však je přímka AC. Jinak řečeno, bod C leží na ose úhlu EAX.

Protože součin směrnic každých dvou navzájem kolmých přímek je -1, přímka EX kolmá k AF má směrnici -2. Protože přímka EA má opačnou směrnici 2, je osa úhlu AEX rovnoběžná s druhou souřadnicovou osou, takže to je nutně přímka EC. Bod C tak leží i na ose úhlu AEX – celé řešení je tudíž hotovo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné poznatky následovně:

- A0. Přímka AE půlí stranu CD, střídavé úhly DAE a CEA jsou shodné, čtyřúhelník $ABXE$ je tětivový: 0 bodů.
- A1. Přímka AC je osou úhlu EAX: 2 body.
- A2. Přímka EC je osou úhlu AEX: 3 body.
- B1. Shodnost úhlů CEA a BAF: 1 bod.
- B2. Shodnost úhlů BAF a XEF: 1 bod.
- C1. Bod X je průsečíkem úseček AJ a EI z druhého řešení: 3 body.
- C2. Bod C je středem kružnice vepsané trojúhelníku s vrcholy v bodech A, E a průsečíku úseček AJ a EI: 3 body.

Místo shodností úhlů v B1 a B2 mohou být uvedeny shodnosti či podobnosti pravoúhlých trojúhelníků s těmito úhly. Případné neúplné analytické řešení hodnoťte podle pokynů A1 a A2, je-li vedeno tímto směrem.

Celkově pak udělte $\max\big(\mathrm{A1} + \max(\mathrm{A2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}), \mathrm{C1} + \mathrm{C2}\big)$ bodů.

3. *Nechť a, b jsou kladná celá čísla taková, že $a^2 - b^2$ je mocninou dvojky. Dokažte, že $a^2 + b^2$ je součtem dvou mocnin dvojky. (Mocninami dvojky rozumíme čísla 2^0, 2^1, $2^2, \ldots$)* (Zdeněk Pezlar a Michal Pecho)

Řešení. Předpokládejme, že kladná celá čísla a, b splňují rovnost $a^2 - b^2 = 2^m$ pro nějaké nezáporné celé číslo m. Potom zřejmě $a > b$ a $(a+b)(a-b) = 2^m$, tedy i kladná celá čísla $a+b$ a $a-b$ musí být mocninami dvojky s celočíselnými nezápornými exponenty.

Pokud by čísla a, b měla různou paritu, obě čísla $a+b$ a $a-b$ by byla lichá, a musela by proto obě být rovna mocnině $2^0 = 1$. To však není možné, neboť $a + b \geqq 2$. Čísla a, b tedy musí mít stejnou paritu, takže obě čísla $a+b$ a $a-b$ jsou sudá, a tedy mocniny dvojky s kladnými exponenty.

Všimněme si, že platí

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\big((a+b)^2 + (a-b)^2\big) = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2,$$

kde oba poslední sčítanci jsou podle předchozího odstavce mocninami dvojky s nezápornými celočíselnými exponenty. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Je zřejmé, že nalezené mocniny dvojky rovné $\frac{1}{2}(a+b)^2$ a $\frac{1}{2}(a-b)^2$ mají liché, a tedy i kladné exponenty.

Jiné řešení. Využijeme opět rozklad $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, podle kterého ze zadání úlohy plyne, že platí $a + b = 2^k$ a $a - b = 2^m$ pro některá nezáporná celá čísla k a m. Pohlédneme-li na tyto dvě rovnosti jako na soustavu dvou rovnic s neznámými a a b, jejím snadným vyřešením dostaneme

$$a = \frac{1}{2}\big(2^k + 2^m\big) = 2^{k-1} + 2^{m-1} \quad \text{a} \quad b = \frac{1}{2}\big(2^k - 2^m\big) = 2^{k-1} - 2^{m-1}.$$

Dosazením těchto vyjádření do součtu $a^2 + b^2$ a následnou úpravou obdržíme

$$a^2 + b^2 = \big(2^{k-1} + 2^{m-1}\big)^2 + \big(2^{k-1} - 2^{m-1}\big)^2 = 2^{2k-1} + 2^{2m-1}.$$

To už bude hledané vyjádření, pokud ovšem ukážeme, že celočíselné exponenty $2k - 1$ a $2m - 1$ jsou nezáporné, tj. že obě čísla k a m jsou různá od nuly. Lze to udělat stejně jako v prvním řešení, nabídněme však jiný postup: Kdyby platilo $k = 0$ nebo $m = 0$, byla by příslušná z mocnin 2^{2k-1}, 2^{2m-1} rovna zlomku $1/2$, tudíž by se mu musely rovnat obě mocniny, aby jejich součet $a^2 + b^2$ byl celým číslem. Rovnost $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ je však vyloučena, neboť $a^2 + b^2 \geqq 1 + 1 = 2$.

Poznámka. Z druhého řešení bezprostředně plyne, že dvojice (a, b) splňující zadání úlohy existují, že jich je nekonečně mnoho a že všechny jsou tvaru

$$(a, b) = \big(2^u + 2^v, 2^u - 2^v\big),$$

kde u, v jsou libovolná celá čísla s vlastností $u > v \geqq 0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně:

A0. Ověření tvrzení úlohy pouze pro konkrétní vyhovující dvojice a, b nebo uvedení rozkladu $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ bez dalších závěrů: 0 bodů.

A1. Konstatování, že čísla $a+b$, $a-b$ jsou mocniny dvojky s celočíselnými nezápornými exponenty: 2 body.
A2. Vyloučení případu, že je některé z čísel $a+b$, $a-b$ rovno 2^0: 1 bod.
A3. Uvedení rovnosti $a^2+b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2$: 3 body.
B1. Konstatování, že $a+b=2^k$ a $a-b=2^m$ pro celá nezáporná k,m: 2 body.
B2. Vyjádření čísel a, b pomocí čísel k a m: 1 bod.
B3. Odvození rovnosti $a^2+b^2=2^{2k-1}+2^{2m-1}$: 3 body.
B4. Vyloučení případu, že některé z čísel k, m z B1 je rovno nule: 1 bod.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{A1}+\mathrm{A2}+\mathrm{A3}, \mathrm{B1}+\max(\mathrm{B2},\mathrm{B3})+\mathrm{B4}\bigr)$ bodů.