I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Pan Špaček byl známým chovatelem ptáků. Celkem jich měl více než 50 a méně než 100. Andulky tvořily devítinu a kanáři čtvrtinu celkového množství.

Kolik ptáků choval pan Špaček? (*L. Hozová*)

Nápověda. Mohl jich chovat např. devadesát?

Možné řešení. Počet ptáků chovaných panem Špačkem musel být dělitelný devíti (podle andulek) a současně čtyřmi (podle kanárů). Taková čísla jsou 36, 72, 108 atd., tedy násobky 36. Z těchto čísel je jedině 72 v uvedeném rozmezí.

Pan Špaček choval 72 ptáků.

Poznámka. Alternativně můžeme psát, že andulek byla $\frac{1}{9}$ a kanárů $\frac{1}{4}$ všech ptáků. Andulek a kanárů dohromady tedy bylo $\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$ všech ptáků. Tento poměr lze vyjádřit jako

$$\frac{13}{36} = \frac{26}{72} = \frac{39}{108} = \cdots$$

Jediná vyhovující možnost je ta druhá. Pro úplnost dodejme, že andulek bylo 8 a kanárů 18.

Z6–I–2

Václav násobil dvě trojmístná čísla obvyklým písemným způsobem. Ověřil, že výsledek je správně, a svůj výpočet někam založil. Po čase potřeboval výsledek použít. Našel sice svůj dřívější výpočet, ale mnoho číslic bylo tak rozmazaných, že nešly přečíst (hvězdičky nahrazují nečitelné číslice):

$$\begin{array}{rccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & 1 & * & * \\
\hline
 & & 2 & 2 & * & * \\
 & & 9 & 0 & * & \\
 & * & * & 2 & & \\
\hline
 & 5 & 6 & * & * & *
\end{array}$$

Václav si už nepamatoval, která čísla násobil, přesto byl schopen určit jejich součin. Jaký byl onen součin? (*L. Hozová*)

Nápověda. Pátrání lze zahájit rozborem posledního mezivýsledku.

Možné řešení. Pro snazší popis rekonstrukce výsledku označíme v každém kroku číslice, na které soustředíme pozornost, písmeny, a ta postupně doplníme.

Číslice 6 ve výsledném čísle jistě nezahrnuje přechod přes desítku (předchozí součet $2 + 0 + 2$ je dostatečně malý). Tedy $b = 5$ (jedině součet $2 + 9 + 5 = 16$ končí číslicí 6) a $a = 4$ (z předchozího vidíme, že dochází k přechodu přes desítku):

$$\begin{array}{ccccc} & & \ast & \ast & \ast \\ \times & & 1 & \ast & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & \ast & \\ a & b & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \ast & \ast & \ast \\ \times & & 1 & \ast & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & \ast & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array}$$

Poslední mezivýsledek (452) vzniká součinem prvního čísla ($\overline{cde}$) s první číslicí druhého čísla (což je 1). Tedy první číslo bylo 452:

$$\begin{array}{ccccc} & & c & d & e \\ \times & & 1 & \ast & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & \ast & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & \ast & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & \ast & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array}$$

Druhý mezivýsledek ($\overline{90g}$) vzniká součinem prvního čísla (452) s druhou číslicí druhého čísla (ozn. f). Tedy $f = 2$ a druhý mezivýsledek byl 904:

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & f & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & g & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & 2 & \ast \\ \hline & 2 & 2 & \ast & \ast \\ & 9 & 0 & 4 & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array}$$

První mezivýsledek ($\overline{22ij}$) vzniká součinem prvního čísla (452) s třetí číslicí druhého čísla (ozn. h). Tedy $h = 5$ a první mezivýsledek byl 2260:

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & 2 & h \\ \hline & 2 & 2 & i & j \\ & 9 & 0 & 4 & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & 9 & 0 & 4 & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & \ast & \ast & \ast \end{array}$$

Odtud již lze určit výsledek — Václavův hledaný součin byl 56 500:

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & 5 & 2 \\ \times & & 1 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & 0 \\ & 9 & 0 & 4 & \\ 4 & 5 & 2 & & \\ \hline 5 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Poznámka. Předposlední dva kroky v uvedeném řešení jsou zaměnitelné. V takovém případě by (zkrácená) rekonstrukce výsledku vypadala takto:

$$
\begin{array}{r}
* * * \\
\times \quad 1 * * \\
\hline
2 2 * * \\
9 0 * \\
4 5 2 \\
\hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 5 2 \\
\times \quad 1 * * \\
\hline
2 2 * * \\
9 0 * \\
4 5 2 \\
\hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 5 2 \\
\times \quad 1 * 5 \\
\hline
2 2 6 0 \\
9 0 * \\
4 5 2 \\
\hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 5 2 \\
\times \quad 1 2 5 \\
\hline
2 2 6 0 \\
9 0 4 \\
4 5 2 \\
\hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 5 2 \\
\times \quad 1 2 5 \\
\hline
2 2 6 0 \\
9 0 4 \\
4 5 2 \\
\hline
5 6 5 0 0
\end{array}
$$

Vzhledem k tomu, že na každém místě může být nanejvýš deset možných číslic, lze v případě chybějícího nápadu postupovat systematickým prověřováním možností.

Součástí úlohy je i popis postupu vedoucího ke správné odpovědi. Vyplněný algebrogram bez přiměřeného komentáře nelze hodnotit nejlepším stupněm.

Z6–I–3

Magda si vystřihla dva stejné rovnoramenné trojúhelníky, z nichž každý měl obvod 100 cm. Nejprve z těchto trojúhelníků složila čtyřúhelník tak, že je k sobě přiložila rameny. Poté z nich složila čtyřúhelník tak, že je k sobě přiložila základnami. V prvním případě jí vyšel čtyřúhelník s obvodem o 4 cm kratším než ve druhém případě.

Určete délky stran vystřižených trojúhelníků. (*E. Semerádová*)

Nápověda. Byla delší základna, nebo rameno trojúhelníku? A o kolik?

Možné řešení. Obvod prvního čtyřúhelníku sestává ze dvou ramen a dvou základen, obvod druhého ze čtyř ramen. Protože první čtyřúhelník měl o 4 cm kratší obvod než druhý, musela být základna o 2 cm kratší než rameno.

Obvod každého trojúhelníku sestává z jedné základny a dvou ramen, což odpovídá třem ramenům bez 2 cm. Současně každý trojúhelník měl obvod 100 cm. Tedy součet délek tří ramen byl 102 cm.

Ramena trojúhelníků měřila 34 cm $(102 : 3 = 34)$ a základna 32 cm $(34 - 2 = 32)$.

Poznámka. Pokud délku základny označíme z a délku ramene r, potom předchozí úvahy lze zapsat následovně (jednotky cm v dalším neuvádíme):

Rozdíl obvodů čtyřúhelníků byl

$$4r - 2r - 2z = 2r - 2z = 4,$$

tedy $r - z = 2$ neboli $z = r - 2$. Obvod každého trojúhelníku byl

$$2r + z = 3r - 2 = 100,$$

tedy $3r = 102$. Odtud dostáváme $r = 102 : 3 = 34$ a $z = 34 - 2 = 32$.

Trojúhelníky s takovými stranami jsou vskutku možné, protože jsou splněny trojúhelníkové nerovnosti ($34 + 32 > 34$ a $34 + 34 > 32$).

Z6–I–4

Sedm trpaslíků se narodilo ve stejný den v sedmi po sobě jdoucích letech. Součet věků tří nejmladších trpaslíků byl 42 let. Když jeden trpaslík odešel se Sněhurkou pro vodu, zjistili zbylí trpaslíci, že jejich průměrný věk je stejný jako průměrný věk všech sedmi.

Kolik let bylo trpaslíkovi, který šel se Sněhurkou pro vodu? (*L. Hozová*)

Nápověda. Kolik let bylo jednotlivým trpaslíkům?

Možné řešení. Součet věků prvních tří trpaslíků byl 42 let, tedy průměrně měli 14 let ($42 : 3 = 14$). Věky těchto, resp. zbylých čtyř trpaslíků byly 13, 14, 15, resp. 16, 17, 18 a 19 let.

Součet věků všech sedmi trpaslíků byl 112 let, tedy průměrně měli 16 let ($112 : 7 = 16$). Pokud by odešel nejmladší trpaslík, průměrný věk zbylých šesti by byl 16,5 let:

$$(112 - 13) : 6 = 16{,}5.$$

Obdobně pro ostatní trpaslíky určíme, co by se po jejich odchodu stalo s průměrným věkem zbylých:

věk odchozího	13	14	15	16	17	18	19
průměr zbylých	16,5	$16{,}\overline{3}$	$16{,}1\overline{6}$	16	$15{,}8\overline{3}$	$15{,}\overline{6}$	15,5

Průměrný věk se nezměnil po odchodu prostředního trpaslíka. Trpaslík, který odešel se Sněhurkou, měl 16 let.

Poznámky. Průměrný věk trpaslíků se po odchodu jednoho z nich nezměnil. Onen trpaslík se tedy narodil jako prostřední a jeho věk byl průměrným věkem všech sedmi. Tímto způsobem lze nahradit zkoušení možností ve druhé části řešení.

Úvahy v uvedeném řešení lze uchopit také takto: Pokud např. věk nejmladšího trpaslíka označíme n, potom součet věků prvních tří trpaslíků byl

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 42.$$

Tedy $3n = 39$ neboli $n = 13$. Věky trpaslíků byly 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 let. Součet všech sedmi věků byl 112 a jejich průměr $112 : 7 = 16$. Pokud věk odchozího trpaslíka označíme o, potom se průměr zbylých nezměnil:

$$(112 - o) : 6 = 16.$$

Tedy $112 - o = 96$ neboli $o = 16$.

Z6–I–5

Pat a Mat se procvičovali v počítání. Ve čtvercové síti orientované podle světových stran přiřadili posunu o jedno políčko následující početní operace:

- při posunu na sever (S) přičítali sedm,
- při posunu na východ (V) odečítali čtyři,
- při posunu na jih (J) dělili dvěma,
- při posunu na západ (Z) násobili třemi.

Např. když Mat zadal Patovi číslo 5 a cestu S–V–J, vyšlo jim při správném počítání 4.

Které číslo zadal Pat Matovi, jestliže pro cestu S–V–J–Z–Z–J–V–S při správném počítání vyšlo 57? (*M. Petrová*)

Nápověda. Které číslo měl Mat v předposledním kroku?

Možné řešení. Úlohu lze znázornit jako tzv. početního hada:

$$\boxed{} \xrightarrow[+7]{\text{S}} \boxed{} \xrightarrow[-4]{\text{V}} \boxed{} \xrightarrow[:2]{\text{J}} \boxed{} \xrightarrow[\cdot 3]{\text{Z}} \boxed{} \xrightarrow[\cdot 3]{\text{Z}} \boxed{} \xrightarrow[:2]{\text{J}} \boxed{} \xrightarrow[-4]{\text{V}} \boxed{} \xrightarrow[+7]{\text{S}} \boxed{57}$$

Postupně odzadu doplníme všechny mezivýsledky:

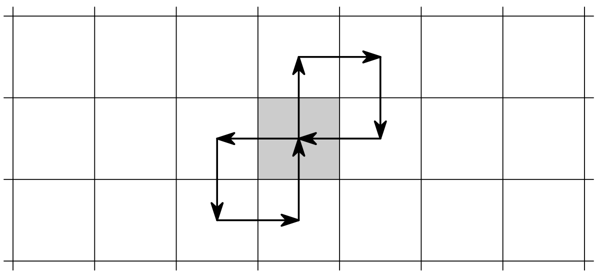
$$\boxed{21} \xrightarrow[+7]{\text{S}} \boxed{28} \xrightarrow[-4]{\text{V}} \boxed{24} \xrightarrow[:2]{\text{J}} \boxed{12} \xrightarrow[\cdot 3]{\text{Z}} \boxed{36} \xrightarrow[\cdot 3]{\text{Z}} \boxed{108} \xrightarrow[:2]{\text{J}} \boxed{54} \xrightarrow[-4]{\text{V}} \boxed{50} \xrightarrow[+7]{\text{S}} \boxed{57}$$

Pat zadal Matovi číslo 21.

Poznámky. Při zpětném postupu operace v jednotlivých krocích obracíme (např. v prvním kroku místo $x+7=57$ uvažujeme $x=57-7$). S tímto postřehem lze předchozí řešení zapsat následovně:

$$\begin{aligned}
(((((((57-7)+4)\cdot 2):3):3)\cdot 2)+4)-7 &= \\
=((((((50+4)\cdot 2):3):3)\cdot 2)+4)-7 &= \\
=(((((54\cdot 2):3):3)\cdot 2)+4)-7 &= \\
&\vdots \\
&=28-7=21.
\end{aligned}$$

Početní had ve čtvercové síti, tedy Matova skutečná cesta vypadala takto:



Ve zvýrazněném poli uprostřed se začínalo (číslem 21), procházelo se jím po čtvrtém kroku (mezivýsledek 36) a také se v něm končilo (výsledek 57).

Z6–I–6

Boris má zvláštní digitální hodiny. Jdou sice přesně, ale místo hodin a minut ukazují jiná dvě čísla: první je ciferným součtem číslic, která by byla na displeji za normálních okolností, druhé je součtem hodin a minut (např. v 7:30 ukazují 10:37).

Jaký může být čas, když Borisovy hodiny ukazují 6:15? Určete všechny možnosti.

(*M. Dillingerová*)

Nápověda. Lze předem vyloučit nějaké číslice z normálního vyjádření času?

Možné řešení. Ciferný součet číslic ukazujících skutečný čas je 6, tedy žádná z číslic není větší než 6. Součet čísel ukazujících skutečné hodiny a minuty je 15. Pomocí číslic od 0 do 6 lze 15 vyjádřit jako součet dvou čísel následujícími způsoby:

$$0 + 15, \quad 1 + 14, \quad 2 + 13, \quad 3 + 12, \quad 4 + 11, \quad 5 + 10.$$

Když Borisovy hodiny ukazují 6:15, může být 0:15, 1:14, 2:13, 3:12, 4:11, 5:10, 10:05, 11:04, 12:03, 13:02, 14:01, nebo 15:00.

Poznámka. Součástí úlohy je i popis postupu vedoucího ke správné odpovědi. Uvedené časy bez přiměřeného komentáře nelze hodnotit nejlepším stupněm.