II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Pankrác, Servác a Bonifác si koupili člun. Pankrác zaplatil 60 % ceny člunu, Servác zaplatil 40 % zbytku ceny a Bonifác doplatil chybějící částku, což bylo 30 zlatek.

Kolik zlatek stál člun, který si chlapci koupili? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Cenu člunu ve zlatkách označíme z. Pankrác zaplatil $\frac{6}{10}z$, zbývalo doplatit

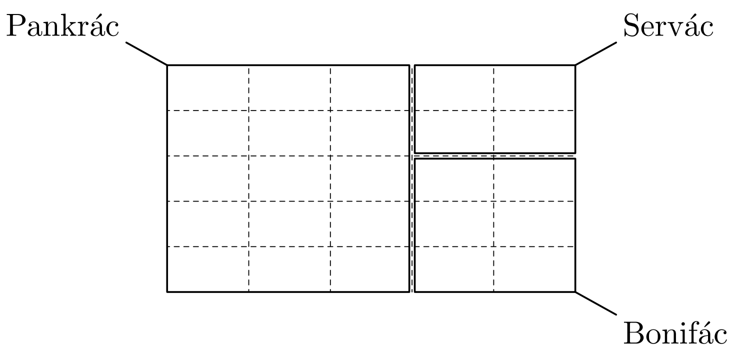
$$\left(1 - \frac{6}{10}\right) z = \frac{4}{10} z.$$

Servác zaplatil $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} z = \frac{16}{100} z$, zbývalo doplatit

$$\left(\frac{4}{10} - \frac{16}{100}\right) z = \frac{24}{100} z = \frac{6}{25} z.$$

Chybějící částku zaplatil Bonifác, což činilo 30 zlatek. Tedy $\frac{6}{25} z = 30$, odkud vyplývá, že $z = 125$. Člun stál 125 zlatek.

Poznámka. Předchozí úvahy lze znázornit následovně (celek představuje cenu člunu, vyznačené obdélníky podíly jednotlivých přispěvatelů):



Hodnocení. 2 body za vyjádření Pankrácova příspěvku a zbytku; 2 body za vyjádření Servácova příspěvku a zbytku; 2 body za dopočítání a odpověď.

Z8–II–2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C a s délkami odvěsen v poměru $1 : 3$. Body K, resp. L jsou středy čtverců, které mají jednu stranu společnou s odvěsnou AC, resp. BC a které se s trojúhelníkem ABC nepřekrývají. Bod M je středem přepony AB.

a) Zdůvodněte, že bod C leží na úsečce KL.

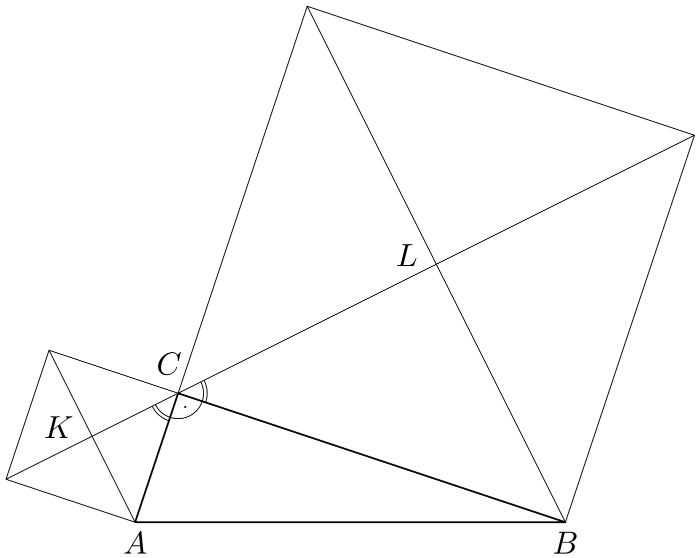
b) Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníků ABC a KLM.

(*J. Švrček*)

Možné řešení. Úsečky KC a CL jsou částmi úhlopříček ve čtvercích, proto úhly KCA a LCB mají velikost 45°. Úhel ACB je pravý, tedy úhel KCL má velikost

$$45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ.$$

Odtud vyplývá, že bod C je vnitřním bodem úsečky KL.



V dalším předpokládáme takové značení vrcholů, že $|AC| : |CB| = 1 : 3$. Velikost odvěsny AC označíme b. S tímto značením je obsah pravoúhlého trojúhelníku ABC vyjádřen jako

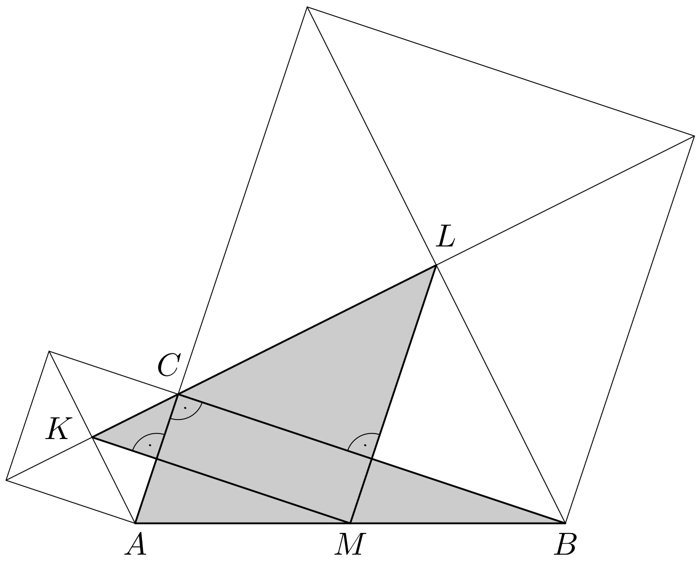
$$\frac{1}{2}(b \cdot 3b) = \frac{3}{2}b^2.$$

Ze zadání plyne, že úsečky KM a ML jsou (prodloužené) střední příčky trojúhelníku ABC. Tedy trojúhelník KLM je také pravoúhlý a navíc rovnoramenný, s velikostmi ramen $\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}b = 2b$. Obsah trojúhelníku KLM je tak roven

$$\frac{1}{2}(2b \cdot 2b) = 2b^2.$$

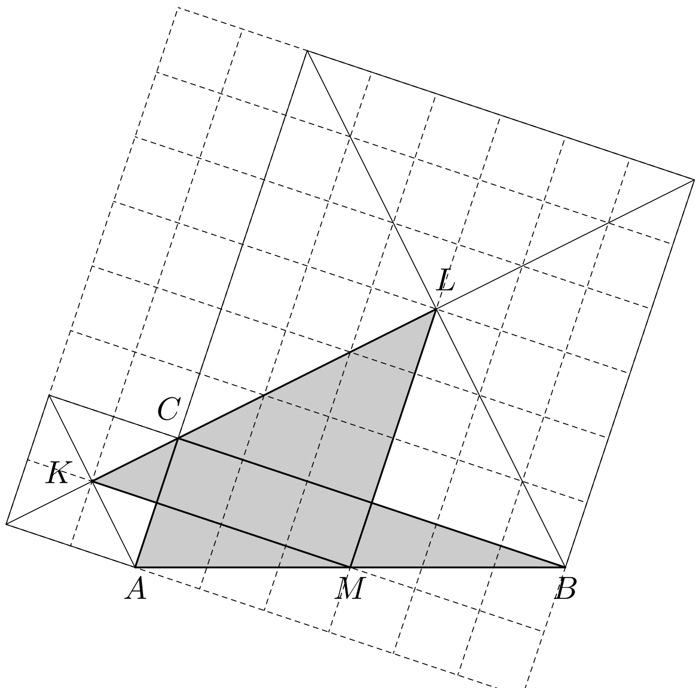
Poměr obsahů trojúhelníků ABC a KLM je

$$\frac{3}{2}b^2 : 2b^2 = 3 : 4.$$



Hodnocení. Po 2 bodech za odpověď na každou z otázek a) a b); 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámky. Namísto předchozího značení $|AC| = b$, $|AB| = 3b$ atd. si lze vypomoct s dodatečným dělením, resp. znázorněním ve čtverečkové síti:



Jak kolineárnost bodů K, C, L, tak pravoúhlost a rovnoramennost trojúhelníku KLM je platná pro obecný pravoúhlý trojúhelník ABC. Daný poměr délek odvěsen promlouvá pouze do poměru obsahů trojúhelníků ABC a KLM.

Z8–II–3

Karolína napsala všechna trojmístná čísla tvořená číslicemi 1, 2 a 3, v nichž se žádná číslice neopakovala a v nichž 2 byla na místě desítek. Nikola napsala všechna trojmístná čísla tvořená číslicemi 4, 5 a 6, v nichž se také žádná číslice neopakovala. Kuba si vybral jedno číslo od Karolíny a jedno číslo od Nikoly tak, aby součet těchto dvou čísel byl sudý.

Jaká byla číslice na místě jednotek v součinu Kubou vybraných čísel? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Karolína napsala čísla

$$123, \quad 321.$$

Nikola napsala čísla

$$456, \quad 465, \quad 546, \quad 564, \quad 645, \quad 654.$$

Obě čísla od Karolíny jsou lichá. Pro sudý součet musel Kuba vybrat liché číslo od Nikoly. Sudý součet dávají právě tyto případy:

$$123 + 465, \quad 123 + 645, \quad 321 + 465, \quad 321 + 645. \qquad (*)$$

Ve všech případech je číslice v součinu na místě jednotek určena lichým násobkem 5, tedy to může být jedině 5.

Hodnocení. Po 1 bodě za Karolínina a Nikolina čísla; 2 body za Kubův výběr sudého součtu; 2 body za určení poslední číslice součinu.

Poznámka. Ke správnému závěru není třeba součiny vyčíslovat. Nicméně pro čtveřici možností v $(*)$ tyto součiny postupně jsou

$$57\,195, \quad 79\,335, \quad 149\,265, \quad 207\,045.$$