II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Maminka se chystala péct rohlíčky, všechny ze stejných dílů těsta. Pokud by každému dítěti upekla tři rohlíčky, zbylo by jí těsto na další dva rohlíčky. Pokud by každému dítěti chtěla upéct čtyři rohlíčky, chybělo by jí těsto na jeden rohlíček.

Pro kolik dětí pekla maminka rohlíčky? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Postupně vzhledem k počtu dětí probereme možnosti:

- Pokud by měla 1 dítě, potom by těsto mělo vycházet na $1 \cdot 3 + 2 = 5$ a současně na $1 \cdot 4 - 1 = 3$ rohlíčky. Tyto hodnoty jsou různé, tedy 1 dítě neměla.
- Pokud by měla 2 děti, potom by těsto mělo vycházet na $2 \cdot 3 + 2 = 8$ a současně na $2 \cdot 4 - 1 = 7$ rohlíčků. Tyto hodnoty jsou různé, tedy 2 děti neměla.
- Pokud by měla 3 děti, potom by těsto mělo vycházet na $3 \cdot 3 + 2 = 11$ a současně na $3 \cdot 4 - 1 = 11$ rohlíčků. Tyto hodnoty jsou stejné, tedy měla 3 děti.

Pro větší počty dětí rovnost nenastane a rozdíl porovnávaných hodnot se bude postupně zvětšovat. Maminka pekla rohlíčky pro 3 děti.

Poznámka. Předchozí rozbor možností lze přehledně zapsat takto (d značí počet dětí):

d	1	2	**3**	4	5	...
$3d + 2$	5	8	**11**	14	17	...
$4d - 1$	3	7	**11**	15	19	...

K vyhovující možnosti lze dospět řešením rovnice

$$3d + 2 = 4d - 1.$$

Hodnocení. 3 body za rozbor možností pro různé počty dětí či sestavení rovnice; 3 body za správný výsledek.

Z6–II–2

Standa a Jana dostali dvě trojmístná čísla. Standa si v prvním čísle doplnil desetinnou čárku za první číslici, ve druhém čísle za druhou číslici, takto vzniklá desetinná čísla sečetl a dostal výsledek 50,13. Jana si v prvním čísle doplnila desetinnou čárku za druhou číslici, ve druhém čísle za první číslici, takto vzniklá desetinná čísla sečetla a dostala výsledek 34,02.

Určete součet původních trojmístných čísel. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Standův, příp. Janin výpočet můžeme přehledně zapsat takto:

$$\begin{array}{rrrr} & a, & b & c \\ d & e, & f & \\ \hline 5 & 0, & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} a & b, & c & \\ & d, & e & f \\ \hline 3 & 4, & 0 & 2 \end{array}$$

Porovnáním hodnot na místě setin v prvním, příp. druhém výpočtu dostáváme $c = 3$, příp. $f = 2$. Předchozí výpočty můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{array}{rrrr} & a, & b & 3 \\ d & e, & 2 & \\ \hline 5 & 0, & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} a & b, & 3 & \\ & d, & e & 2 \\ \hline 3 & 4, & 0 & 2 \end{array}$$

Porovnáním hodnot na místě desetin v prvním, příp. druhém výpočtu dostáváme $b = 9$, příp. $e = 7$. Předchozí výpočty můžeme vyjádřit následovně, přičemž máme na paměti, že v obou případech dochází k přechodu přes desítku:

$$\begin{array}{rrrr} & a, & 9 & 3 \\ d & 7, & 2 & \\ \hline 5 & 0, & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} a & 9, & 3 & \\ & d, & 7 & 2 \\ \hline 3 & 4, & 0 & 2 \end{array}$$

Porovnáním hodnot na místě jednotek v prvním, příp. druhém výpočtu dostáváme $a = 2$, příp. $d = 4$. Po dosazení zjišťujeme, že shoda vládne i na místě desítek:

$$\begin{array}{rrrr} & 2, & 9 & 3 \\ 4 & 7, & 2 & \\ \hline 5 & 0, & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 2 & 9, & 3 & \\ & 4, & 7 & 2 \\ \hline 3 & 4, & 0 & 2 \end{array}$$

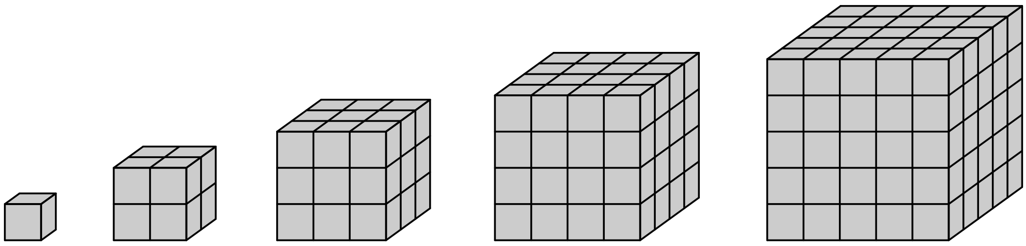
Původní trojmístná čísla byla 293 a 472. Hledaný součet je

$$\begin{array}{rrr} 2 & 9 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ \hline 7 & 6 & 5 \end{array}$$

Hodnocení. 1 bod za vhodný zápis problému; 3 body za dílčí kroky v určování neznámých číslic; 2 body za dopočítání a výsledek.

Z6–II–3

Zuzka měla pět čtverečkovaných kostek s hranami délek od 1 do 5 čtverečků:



Ze všech těchto kostek slepila věž, ve které menší kostky stavěla na větší, a to vždy celou jednou stěnou. Poté Zuzka celou věž kromě podstavné stěny obarvila. Barvu měla v kelímcích, z nichž každý stačil k obarvení plochy odpovídající přesně 5 čtverečkům.

Kolik kelímků barvy stačilo Zuzce k obarvení věže? (*E. Novotná*)

Možné řešení. Každá kostka má šest stejných stěn. Celkový povrch všech (neslepených) kostek je

$$6 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 6 \cdot 55 = 330 \text{ čtverečků.}$$

Po lepení a natírání jsou na každé kostce neobarveny celá dolní stěna a na horní stěně plocha odpovídající stěně sousední menší kostky. Neobarvené plochy tedy odpovídají

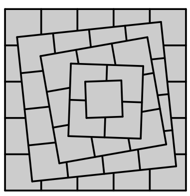
$$2 \cdot (1 + 4 + 9 + 16) + 25 = 2 \cdot 30 + 25 = 85 \text{ čtverečkům.}$$

Obarvený povrch kostek odpovídá $330 - 85 = 245$ čtverečkům. K jejich obarvení Zuzce stačí $245 : 5 = 49$ kelímků barvy.

Poznámky. Obarvené plochy na jednotlivých kostkách odpovídají postupně 5, 19, 41, 71 a 109 čtverečkům (tyto hodnoty jsou vypočteny postupně jako $6 - 1$, $5 \cdot 4 - 1$, $5 \cdot 9 - 4$, $5 \cdot 16 - 9$ a $5 \cdot 25 - 16$). Vskutku platí, že

$$5 + 19 + 41 + 71 + 109 = 245.$$

Z každé kostky jsou obarveny čtyři boční stěny a část horní stěny. Obarvené části horních stěn dohromady odpovídají stěně největší kostky (bez ohledu na umístění jednotlivých kostek), což je dobře patrné při pohledu na věž shora:



K uvedenému výsledku se tedy lze dopočítat takto:

$$4 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25) + 25 = 4 \cdot 55 + 25 = 245.$$

Hodnocení. 3 body za částečná pozorování a mezivýsledky; 2 bod za celkový obarvený povrch; 1 bod za počet kelímků barvy.