64. ročník Mezinárodní matematické olympiády

64. Mezinárodní matematická olympiáda (IMO) se konala ve dnech 2.–13. července 2023 v japonské Čibě nedaleko Tokia. Do Japonska se tak soutěž vrátila po 20 letech, v roce 2003 se soutěž konala přímo v Tokiu. Tehdy se soutěže zúčastnilo 457 žáků z 82 zemí celého světa, letos to již bylo 612 žáků ze 112 zemí, poprvé přijela reprezentace Kamerunu.

Příprava soutěže je během na dlouhou trať, po zvolení před čtyřmi lety se jí pod záštitou vlády ujala Nadace japonské matematické olympiády. Dle informace organizátorů byl její rozpočet přibližně ve výši tří milionů amerických dolarů. Z návrhů, které v březnu poslaly jednotlivé účastnické státy, sestavila výběrová komise tzv. Shortlist obsahující 32 úloh, po osmi z každé z tradičních oblastí středoškolské matematiky (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel). Z něj vybrala Jury sestávající z vedoucích jednotlivých delegací 6. července šestici úloh, které tito vedoucí poté přeložili do národních jazyků.

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků ústředního kola kategorie A 72. ročníku Matematické olympiády a následného výběrového soustředění. Místo v reprezentaci si vybojovali: *Tereza Černá* (7/8), Gymnázium Litoměřická, Praha 9, *Michal Janík* (8/8) a *Samuel Rosiar* (4/4), oba Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, *Erik Ježek* (1/4), Smíchovská střední průmyslová škola a gymnázium, Praha 5, *Štěpán Mikéska* (8/8), Gymnázium Brno, tř. Kapitána Jaroše a *Jakub Štepo* (8/8), Gymnázium Kladno. Vedoucím české delegace byl *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.,* z MFF UK v Praze a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z PřF UP v Olomouci.

Soutěžící a jejich pedagogický doprovod přiletěli do Čiby 6. července a byli ubytováni v hotelu APA ve čtvrti Makuhari. Na slavnostním zahájení v pátek 7. července uvítala soutěžící spolu s organizátory ministryně školství, kultury, sportu a inovací Japonska paní *Nagaoka Keiko*.

Samotné soutěži pak byly věnovány dva dny, sobota 8. a neděle 9. července, ve kterých soutěžící řešili v časovém limitu 4,5 hodiny po třech úlohách, za každou z nich mohli získat až sedm bodů. Následující dva dny se soutěžící seznamovali s Japonskem a jeho kulturou, po návštěvě Disneylandu měli na výběr z řady fakultativních programů, které sahaly od různých tematických prohlídek Tokia až ke sportovním utkáním na místní univerzitě. Mezitím vedoucí delegací spolu s koordinátory opravovali a hodnotili jejich řešení psaná v národních jazycích.

Po dvou dnech skončilo i jejich pracovní nasazení a na slavnostním zakončení byly vyhlášeny konečné výsledky. Úvodní úlohy každého dne se dle očekávání ukázaly jako nejjednodušší, průměrný bodový zisk z nich byl po řadě 5,8 a 4,7 bodu (ze 7 možných). Druhé úlohy každého dne již měly rozřadit medailisty, průměrné bodové zisky z nich byly 3,2 a 2,4 bodu. Paradoxně si české družstvo mnohem lépe poradilo s kombinatorickou druhou úlohou druhého dne a dle průměru snadnější geometrie prvního dne se pro něj ukázala jako velmi těžká. Třetí úlohy každého dne vybírá Jury s cílem rozřadit účastníky se zlatými medailemi, což opět potvrdily průměrné bodové zisky 1,3 a 0,3. Přestože Jury velmi váhala se zařazením třetí úlohy druhého dne, kdy převažoval názor, že úloha je extrémně obtížná, ukázalo se nakonec, že všech šest úloh bez ztráty jediného bodu vyřešilo pět účastníků (dva z Číny, po jednom z Koreje, Rumunska a USA), přitom tuto úlohu s drobnými problémy vyřešilo jedenáct účastníků. Celkově se v porovnání s minulými léty ukázaly úlohy jako jednodušší, o čemž svědčí i hranice pro zisk medailí: po řadě zlatá, stříbrná a bronzová se udělovaly za 32, 25 a 18 bodů (ze 42 možných). České družstvo potvrdilo svou pozici na konci první poloviny zúčastněných zemí, mimo tradičně silných lidnatých zemí nás letos porazily tyto země se srovnatelným počtem obyvatel (méně než 20 milionů): čtvrté Rumunsko, Singapur, Izrael, Bělorusko, Kazachstán, Maďarsko, Hongkong, Bulharsko, Řecko, Nizozemsko, Mongolsko, Arménie, Bosna a Hercegovina, Gruzie, Slovensko, Severní Makedonie, Srbsko a Švýcarsko. Umístění na 45. pozici v neoficiálním hodnocení zemí nijak nevybočuje z výsledků minulých let. O tom svědčí i zisk čtyř bronzových medailí: *Samuel Rosiar*, 23 bodů a 183. pozice, *Erik Ježek* a *Štěpán Mikéska*, oba 22 bodů a 220. místo a *Michal Janík*, 21 bodů, 237. pozice. *Tereza Černá* se ziskem 17 bodů skončila pod hranicí bronzové medaile, ale odváží si alespoň čestné uznání za úplné vyřešení jedné – ve skutečnosti dvou – úloh. S úplnými výsledky se může seznámit na stránkách IMO.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh, v závorce je navrhující země. Jejich řešení hledejte na stránkách letošního ročníku IMO

První soutěžní den

(8. 7. 2023)

1. Určete všechna složená přirozená čísla $n > 1$, která splňují následující podmínku: pokud $d_1, d_2, \dots, d_k$ jsou všechny kladné dělitele čísla n a $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, pak d_i je dělitelem $d_{i+1} + d_{i+2}$ pro každé $1 \leqq i \leqq k-2$. (*Kolumbie*)

2. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| < |AC|$. Označme Ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC a S střed jejího oblouku CB obsahujícího bod A. Kolmice na přímku BC vedená bodem A protíná úsečku BS v bodě D a kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$. Rovnoběžka s BC vedená bodem D protíná přímku BE v bodě L. Označme ω kružnici opsanou trojúhelníku BDL. Nechť ω protíná Ω podruhé v bodě $P \neq B$.
Dokažte, že tečna ke kružnici ω v bodě P protíná přímku BS v bodě, který leží na ose vnitřního úhlu BAC. (*Portugalsko*)

3. Pro každé přirozené číslo $k \geqslant 2$ určete všechny nekonečné posloupnosti kladných celých čísel $a_1, a_2, \dots$, pro něž existuje polynom P tvaru $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0$, kde $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ jsou nezáporná celá čísla, takový, že

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

pro každé přirozené $n \geqq 1$. (*Malajsie*)

Druhý soutěžní den

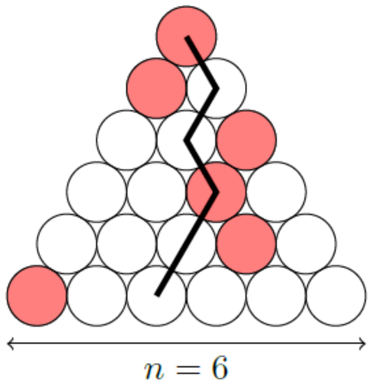
(9. 7. 2023)

4. Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ jsou po dvou různá kladná reálná čísla taková, že

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

je celé číslo pro každé $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokažte, že $a_{2023} \geqq 3034$. (*Nizozemsko*)

5. Buď n kladné celé číslo. *Japonský trojúhelník* sestává z $1+2+\ldots+n$ kruhů uspořádaných do tvaru rovnostranného trojúhelníku tak, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ obsahuje i-tá řada právě i kruhů, z nichž právě jeden je obraven červeně. *Nindžova cesta* v japonském trojúhelníku je posloupnost n kruhů, která začíná kruhem v horní řadě, z každého kruhu pokračuje vždy do jednoho ze dvou kruhů ležících přímo pod ním a končí v dolní řadě. Zde je příklad japonského trojúhelníku pro $n = 6$ a v něm příklad nindžovy cesty obsahující dva červené kruhy:



V závislosti na n najděte největší k takové, že v každém japonském trojúhelníku existuje nindžova cesta obsahující aspoň k červených kruhů. (*Nizozemsko*)

6. Buď ABC rovnostranný trojúhelník. Nechť A_1, B_1, C_1 jsou vnitřní body trojúhelníku ABC takové, že $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ a

$$|\angle BA_1C| + |\angle CB_1A| + |\angle AC_1B| = 480°.$$

Přímky BC_1 a CB_1 se protínají v bodě A_2, přímky CA_1 a AC_1 v bodě B_2 a přímky AB_1 a BA_1 v bodě C_2.

Dokažte, že pokud je trojúhelník $A_1B_1C_1$ různostranný, pak tři kružnice opsané trojúhelníkům AA_1A_2, BB_1B_2 a CC_1C_2 procházejí všechny dvěma společnými body.

(Poznámka: různostranný trojúhelník je takový, v němž žádné dvě strany nejsou shodné.)

(*USA*)

Mezinárodní matematická olympiáda se v roce 2024 bude konat v britském Bathu, následovat budou Austrálie a Čína. Jury letos nově přislíbila organizaci soutěže v roce 2027 Maďarsku a pro rok 2028 uvažuje o Saudské Arábii.

Pavel Calábek