73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy domácího kola kategorie C

1. *Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Ano, takových deset čísel existuje. Příkladem je těchto deset po sobě jdoucích čísel, pod která rovnou napíšeme jejich požadované dělitele:

$$\underset{9}{153},\quad \underset{7}{154},\quad \underset{5}{155},\quad \underset{3}{156},\quad \underset{1}{157},\quad \underset{1}{158},\quad \underset{3}{159},\quad \underset{5}{160},\quad \underset{7}{161},\quad \underset{9}{162}.$$

Skutečně, dělitelnost číslem 1 platí triviálně, čísly 3 a 9 podle ciferných součtů, číslem 5 podle posledních číslic a dělitelnost číslem 7 plyne z rovností $154 = 7 \cdot 22$ a $161 = 154 + 7$.

Komentář. Uvedené řešení je úplné, přesto uvedeme úvahy, které k němu vedly.

Označme nejmenší z hledaných deseti čísel písmenem n. Stejně jako v řešení zapišme přehledně, čím má být které číslo dělitelné:

$$\underset{9}{n},\quad n \underset{7}{+} 1,\quad n \underset{5}{+} 2,\quad n \underset{3}{+} 3,\quad n \underset{1}{+} 4,\quad n \underset{1}{+} 5,\quad n \underset{3}{+} 6,\quad n \underset{5}{+} 7,\quad n \underset{7}{+} 8,\quad n \underset{9}{+} 9.$$

- Pokud zvolíme n dělitelné 9, bude rovněž číslo $n + 9$ dělitelné 9. Zároveň budou čísla $n + 3$ i $n + 6$ dělitelná 3.
- Bude-li číslo $n + 1$ dělitelné 7, bude také číslo $n + 8$ dělitelné 7.
- Bude-li číslo $n + 2$ dělitelné 5, bude i číslo $n + 7$ dělitelné 5.

Protože je navíc dělitelnost číslem 1 splněna vždy, stačí najít číslo n splňující tři podmínky:

(i) n je dělitelné 9,
(ii) $n + 1$ je dělitelné 7,
(iii) $n + 2$ je dělitelné 5.

Zaměříme se nejdříve na podmínky (i) a (ii). Ze všech čísel 9, 18, 27, 36, ... dělitelných 9 vybereme nejmenší, které splňuje (ii). Tím je 27, protože 28 je dělitelné 7.

Zamysleme se, jak vypadají všechna další čísla n splňující (i) a (ii). Zapíšeme je jako $27 + k$ s celým číslem $k > 0$. Abychom splnili (i), zřejmě musí být k násobek 9 (a také to stačí). Podmínka (ii) znamená, že číslo $n + 1 = 28 + k$ má být dělitelné 7, takže k musí být i násobek 7. Díky nesoudělnosti čísel 7 a 9 to znamená, že k je násobek čísla $9 \cdot 7 = 63$. Tudíž všechna n splňující současně (i) a (ii) jsou tvaru $n = 27 + 63l$, kde l je nezáporné celé číslo. Jsou to čísla 27, 90, 153, 216, ...

Zbývá vyhovět podmínce (iii). Z čísel $27 + 2$, $90 + 2$, $153 + 2$, $216 + 2$, ... máme vybrat takové, které je dělitelné 5. Prvním z nich je zřejmě číslo 155, takže nejmenším n splňujícím trojici podmínek (i), (ii), (iii) je číslo $n = 153$ (které jsme uvedli v řešení). Kdybychom zopakovali úvahu z předchozího odstavce, zjistili bychom, že (s ohledem na nesoudělnost čísel 63, 5 a rovnost $63 \cdot 5 = 315$) všechna vyhovující čísla n jsou tvaru $153 + 315l$. Patří mezi ně například číslo se zajímavým dekadickým zápisem 888 888 888.

Poznámka. Zadáním úlohy bylo pouze rozhodnout o existenci vyhovující skupiny deseti po sobě jdoucích přirozených čísel, nebylo proto nutné takovou skupinu čísel hledat. Ukážeme, že její existence je důsledkem *čínské zbytkové věty.** K tomu se na podmínky (i), (ii) a (iii), které jsme odvodili v podaném komentáři, podíváme tak, že totéž číslo n má dávat požadované zbytky po děleních několika různými čísly. Konkrétně

(i) n dává zbytek 0 po dělení číslem 9,
(ii) n dává zbytek 6 po dělení číslem 7,
(iii) n dává zbytek 3 po dělení číslem 5.

Protože čísla 9, 7 a 5 jsou po dvou nesoudělná, dle čínské zbytkové věty skutečně existuje číslo n, které tři uvedené podmínky splňuje, jak jsme měli ukázat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Petr napsal na tabuli 7 po sobě jdoucích přirozených čísel. Pavel je neviděl, avšak tvrdí, že jedno z nich je dělitelné sedmi. Má pravdu? Proč? [Pavel má pravdu. Označme n nejmenší ze sedmi čísel a z jeho zbytek při dělení sedmi. Pokud neplatí $z = 0$, je $1 \leqq 7 - z \leqq 6$, takže číslo $n + (7 - z)$ je napsáno na tabuli a je dělitelné sedmi, neboť je součtem čísel $n - z$ a 7, která jsou obě dělitelná sedmi.]

N2. Myslím si přirozené číslo. Pokud jej zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 3. Pokud myšlené číslo zmenším o 2, dostanu číslo dělitelné 4. a) Jaké nejmenší číslo si můžu myslet? b) Najděte všechna čísla, která si můžu myslet. [a) Číslo 10. Z čísel 4, 7, 10, $13, \ldots$ vybereme nejmenší, které rovněž splňuje druhou podmínku. b) Číslo $10 + 12k$ pro libovolné nezáporné celé k. Každé číslo se ve srovnání s číslem 10 liší o násobek 3 (z první podmínky) a zároveň o násobek 4 (z druhé podmínky), tedy o násobek 12.]

N3. Blechy Adam a Bára skáčou po očíslovaných schodech stále nahoru. Adam začíná na 1. schodu a skáče o a schodů. Blecha Bára začíná na 3. schodu a skáče o b schodů. Schody, na které obě blechy doskočí, nazveme „dvakrát navštívené“. Určete nejmenší kladný rozdíl pořadových čísel dvakrát navštívených schodů, a to v případech a) $a = 4$ a $b = 5$, b) $a = 4$ a $b = 6$, c) $a = 6$ a $b = 9$. [a) 20, b) 12, c) takové schody neexistují. Hledaný rozdíl je obecně roven nejmenšímu společnému násobku čísel a a b, pokud ovšem dvakrát navštívené schody vůbec existují. To je v případě c) vyloučeno, neboť celá čísla k, l pro rovnici $1 + ka = 3 + lb$ tehdy neexistují – z čísel $1 + 6k$ a $3 + 9l$ je vždy pouze to druhé dělitelné třemi.]

D1. Rozmyslete si, proč z n po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy právě jedno dělitelné číslem n. [Zbytky n po sobě jdoucích přirozených čísel tvoří – podle zbytku k nejmenšího z těchto čísel – v případě $k = 0$ n-tici $(0, 1, 2, \ldots, n - 1)$, v případě $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ n-tici $(k, k + 1, \ldots, n - 1, 0, 1, \ldots, k - 1)$.]

D2. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. [Jedná se o úlohu 71–C–I–1. Když její znění převedeme do jazyka čísel, z řešení úlohy N2 nám vyplyne, že počet žáků je tvaru $10 + 12k$. Díky rovnosti $10 + 12k = 6(1 + 2k) + 4$ má zbytek takového čísla po dělení 6 potřebnou hodnotu 4.]

D3. Čtyři dny po sobě jsem zdolával stejné schodiště o méně než 100 schodech. Bral jsem ho první den po 2 schodech, druhý den po 3, třetí den po 4 a čtvrtý den po 5 schodech, na poslední krok mi zbyly po řadě 1, 2, 3 a 4 schody. Kolik schodů celé schodiště mělo? [59. Kdyby mělo schodiště o 1 schod více, byl by jejich počet dělitelný každým z čísel 2, 3, 4, 5.]

* Najdete ji i s důkazem ve studijním textu zmíněném v závěru k návodným úlohám.

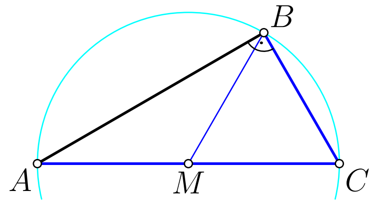
D4. Myslím si přirozené číslo, které je větší než 2000, menší než 3000 a je dělitelné 17. Pokud myšlené číslo zvětším o 1, dostanu číslo dělitelné 11. Pokud své číslo naopak zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 6. Jaké číslo si myslím? [Hledejme nejdříve nejmenší přirozené číslo n s vlastnostmi $17 \mid n$, $11 \mid n+1$ a $6 \mid n-1$. Pracnějšímu postupu se vyhneme, když $6 \mid n-1$ zapíšeme jako $6 \mid n+17$ a přejdeme tak jen ke dvěma podmínkám $(17 \cdot 6) \mid n+17$ a $11 \mid n+1$. Protože $17 \cdot 6 = 102$, z první podmínky máme $n = 102k - 17$, tudíž hledáme nejmenší přirozené k, pro něž $11 \mid 102k - 16$. To lze zjednodušit na $11 \mid 3k + 6$ a dále ještě na $11 \mid k + 2$, odkud $k = 9$ a $n = 102 \cdot 9 - 17 = 901$. Protože $17 \cdot 6 \cdot 11 = 1122$, všechna vyhovující n jsou tvaru $901 + 1122l$. Proto je myšlené číslo $901 + 1122 = 2023$.]

Doplňující literatura: Své poznatky a dovednosti k tématu úlohy si můžete zopakovat a doplnit podle brožurky Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých*. Zájemcům o hlubší poučení doporučujeme studijní text Seriál – Teorie čísel.

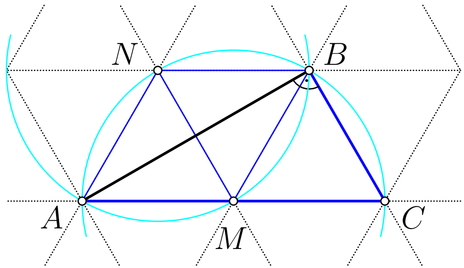
2. *Pro střed M přepony AC pravoúhlého trojúhelníku ABC platí $|BC| = |CM|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABM mají stejné poloměry.*

(Michal Pecho)

ŘEŠENÍ. Podle Thaletovy věty je bod M středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, tudíž platí $|MA| = |MB| = |MC|$. Ze zadání rovněž platí $|BC| = |CM|$, takže všechny úsečky MA, MB, MC, BC jsou shodné a trojúhelník BCM je rovnostranný.



Z kopií rovnostranného trojúhelníku BCM vytvořme pravidelnou trojúhelníkovou síť podle dalšího obrázku. V ní všechny tři vrcholy A, B, C původního trojúhelníku ABC budou uzlovými body.



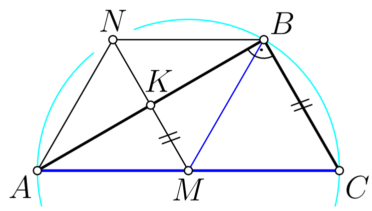
Pro další vyznačený uzlový bod N potom platí $|NA| = |NB| = |NM|$, takže délka jedné úsečky sítě je poloměrem jak kružnice opsané trojúhelníku ABM, tak i poloměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

KOMENTÁŘ. I když je konstrukce trojúhelníkové sítě, kterou jsme v řešení využili, vcelku jasná, ukažme, že jsme se mohli bez zmínky o ní obejít.

Po nalezení čtyř shodných úseček z prvního obrázku sestrojíme v polorovině ACB rovnostranný trojúhelník AMN, který je shodný s trojúhelníkem BCM. Třetí trojúhelník BNM pak je rovnoramenný se základnou BN a u hlavního vrcholu M má úhel velikosti $180° - 2 \cdot 60° = 60°$. Je to tedy rovněž rovnostranný trojúhelník, navíc shodný s trojúhelníky BCM a AMN. Z rovností $|NA| = |NM| = |NB| = |AM|$ už plyne, co jsme měli dokázat.

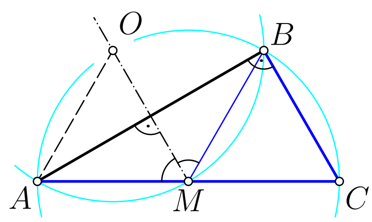
Mohli jsme také začít tak, že k rovnostrannému trojúhelníku BCM přikreslíme (vně) rovnostranný trojúhelník BNM. Dostaneme tak kosočtverec $BCMN$, jehož strana MN je stejně jako protější strana BC kolmá k úsečce AB. Nyní z $MN \perp AB$ a $|MA| = |MB|$ plyne, že přímka MN je osou úsečky AB. Proto platí rovněž $|NA| = |NB|$, což dohromady s $|NB| = |NM|$ znamená, že N je střed kružnice opsané trojúhelníku ABM. Její poloměr NB má přitom stejnou délku jako poloměr MC kružnice opsané trojúhelníku ABC.

JINÉ ŘEŠENÍ. Podle Thaletovy věty je bod M středem kružnice opsané trojúhelníku ABC a její poloměr r je společnou délkou úseček MA, MB, MC. Označme K střed odvěsny AB a střední příčku MK o délce $\frac{1}{2}|BC|$ prodlužme za bod K do úsečky MN dvojnásobné délky. Vznikne nám tak rovnoběžník $AMBN$, jehož úhlopříčka MN je shodná s odvěsnou BC. Díky rovnosti $|MA| = |MB| = r$ se jedná o kosočtverec se (shodnými) stranami délky r.



Teprve nyní využijeme podmínku ze zadání, podle které platí $|BC| = r$. Délku r mají tudíž nejen strany kosočtverce $AMBN$, ale také jeho úhlopříčka MN. Nyní z rovností $r = |NA| = |NB| = |NM|$ už plyne, že N je střed kružnice o poloměru r, která je opsána trojúhelníku ABM.

JINÉ ŘEŠENÍ. Úvodem stejně jako v prvním řešení zjistíme, že trojúhelník BCM je rovnostranný. Střed kružnice opsané trojúhelníku ABM, který označíme O, jistě leží na ose jeho strany AB. Tato osa je díky rovnosti $|AM| = |BM|$ současně osou úhlu AMB, který má velikost $180° - |\sphericalangle CMB| = 180° - 60° = 120°$. Proto má úhel AMO poloviční velikost $60°$. Je to však úhel při základně AM rovnoramenného trojúhelníku AMO (neboť $|OA| = |OM|$ podle zavedení bodu O), který je tudíž rovnostranný. Platí tedy $|MA| = |OM|$ a požadovaný důkaz rovnosti poloměrů dvou kružnic je hotov.



NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechny rovnoramenné trojúhelníky, které mají aspoň jeden vnitřní úhel velikosti a) $30°$, b) $60°$. [a) Jsou to trojúhelníky s trojicemi vnitřních úhlů $(30°, 30°, 120°)$ a $(30°, 75°, 75°)$. b) Vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky.]

N2. Bez užití Thaletovy věty dokažte, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku splývá se středem jeho přepony. Využijte k tomu vhodně dvě střední příčky. [Střed kružnice opsané obecnému trojúhelníku leží v průsečíku os jeho tří stran, k jeho určení stačí využít dvě z těchto os. Střední příčky pravoúhlého trojúhelníku, které jsou rovnoběžné s jeho odvěsnami, leží na osách těchto dvou stran. Proto tyto dvě osy procházejí společným bodem zmíněných dvou příček, tedy středem přepony.]

N3. Uvažme šest bodů: vrcholy daného rovnostranného trojúhelníku a středy jeho stran. Zjistěte, kolik pravoúhlých trojúhelníků má za vrcholy tři ze šesti uvažovaných bodů. [Šest. Jednou z odvěsen každého trojúhelníku musí být některá výška původního rovnostranného trojúhelníku.]

D1. V daném pravoúhlém trojúhelníku ABC označme K střed přepony AB a L střed kratší odvěsny AC. Kružnice s průměrem BC protne úsečku KL v bodě P. Dokažte, že úhly PAC a PBC jsou shodné. [72–C–S–2]

D2. Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy jeho stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A. [70–C–II–3, přečtěte si také poznámku 2 za řešením této úlohy.]

D3. Šestiúhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost, má čtyři po sobě jdoucí strany o délkách 1, 7, 4 a 2. Zjistěte délku zbývajících dvou stran. [5 a 6. Protože vnitřní úhly daného šestiúhelníku mají velikost $(6-2) \cdot 180°/6 = 120°$, lze jeho vrcholy umístit do uzlů rovinné sítě tvořené rovnostrannými trojúhelníky o straně délky 1.]

3. *Uvažujme* 20 *výroků:*

„Mám právě jednu sestru.“	*„Mám právě jednoho bratra.“*
„Mám právě dvě sestry.“	*„Mám právě dva bratry.“*
⋮	⋮
„Mám právě deset sester.“	*„Mám právě deset bratrů.“*

a) *Každý ze čtyř sourozenců pronesl jiný z těchto* 20 *výroků. Je možné, že všichni čtyři měli pravdu?*

b) *Najděte největší přirozené číslo n takové, že každý z n sourozenců může pronést jiný z těchto* 20 *výroků a mít pravdu.** (Josef Tkadlec)

Řešení. a) Ano, je to možné. V případě, kdy čtyři sourozenci jsou dva bratři a dvě sestry, mohou pravdivě pronést čtyři navzájem různé výroky. Jeden bratr řekne: „Mám právě jednoho bratra“ a druhý: „Mám právě dvě sestry,“ jedna sestra řekne: „Mám právě jednu sestru“ a druhá: „Mám právě dva bratry.“

b) Pro $n = 4$ jsme zjistili, že každý ze čtyř sourozenců může pronést jiný pravdivý výrok.

V případě $n \geqq 5$ jsou alespoň tři sourozenci stejného pohlaví. Předpokládejme, že každý z nich řekne pravdu o počtu svých sester nebo bratrů. Pak ovšem alespoň dva z těchto pronesených výroků budou stejné (ty o počtu sester, nebo ty o počtu bratrů). Žádné celé $n \geqq 5$ tudíž nemá požadovanou vlastnost.

Závěr. Největší vyhovující n je rovno 4.

Komentář. V části b) podaného řešení jsme využili poznatek, který se nazývá *Dirichletův princip* nebo též *přihrádkový princip*.** Tvrdí například to, že když rozmístíme 13 předmětů do 2 přihrádek, bude v některé přihrádce alespoň 7 předmětů. Nebo když rozmístíme 13 předmětů do 3 přihrádek, bude v některé přihrádce alespoň 5 předmětů. Nebo při rozmístění $2n+1$ předmětů do 2 přihrádek bude v některé přihrádce aspoň $n+1$ předmětů. Obecně vyjádřeno: při rozmístění alespoň $kn+1$ předmětů do k přihrádek bude v některé přihrádce aspoň $n+1$ předmětů (zapsali jsme to výše jak pro $k = 2$ a $n = 6$, tak pro $k = 3$ a $n = 4$, i pro $k = 2$ a obecné n). Přitom „předměty“ mohou být čísla, geometrické útvary, lidé, výroky, v podstatě cokoliv. Přihrádky pak mohou vyjadřovat libovolné vlastnosti jednotlivých předmětů. Například do 2 přihrádek často rozdělujeme celá čísla podle toho, zda jsou sudá, nebo lichá (viz návodnou úlohu N2).

V našem řešení jsme použili Dirichletův princip dvakrát, vždy pro 2 přihrádky. V prvním případě sourozenci hráli roli „předmětů“ a pohlaví (mužské/ženské) hrálo roli „přihrádek“. Ve druhém případě byly „předměty“ výroky a „přihrádkami“ byly výroky o sestrách a výroky o bratrech.

Poznámka. Ukažme, že výklad části b) řešení lze podat i jinak. Je-li v dané skupině n sourozenců právě B bratrů a právě S sester, může každý z nich o sobě pravdivě pronést pouze jeden ze čtyř výroků (první dva jsou prohlášení bratrů, zbylé dva prohlášení sester):

1. Mám právě S sester.
2. Mám právě $B-1$ bratrů.

* Všichni sourozenci mají stejné rodiče.

** Viz poznámku pod čarou k úloze N2.

3. Mám právě $S - 1$ sester.
4. Mám právě B bratrů.

Mají-li proto být pronesené výroky v počtu $n = B + S$ navzájem různé, musí platit nerovnost $n \leqq 4$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V jedné rodině žije a) 7 bratrů bez sestry, b) 7 bratrů a 1 sestra. Každý z nich pronese jedno pravdivé prohlášení z nabídky v soutěžní úloze. Určete maximální počet různých výroků, které mohou zaznít. [a) 1, b) 3. V případě b) připadají v úvahu pouze 3 výroky: o právě 1 sestře, o právě 7 bratrech a o právě 6 bratrech.]

N2. Mějme n navzájem různých přirozených čísel. Každé z nich obarvíme buď modře, nebo červeně. Zjistěte, pro jaké nejmenší n už zaručeně najdeme dvě čísla stejné barvy, jejichž rozdíl je sudý.* [$n = 5$. Rozdíl dvou čísel je sudý, právě když čísla mají stejnou paritu (sudé/liché). V případě $n \geqq 5$ najdeme podle Dirichletova principu alespoň 3 obarvená čísla stejné parity. Některá dvě z nich budou mít stejnou barvu. Pro $n = 4$ (a tím i vlastně pro $n < 4$) uvedeme protipříklad: za předpokladu, že máme zadána čísla od 1 do 4, obarvíme modře čísla 1, 2 a červeně čísla 3, 4.]

D1. Do pytle je naházeno 5 párů černých, 6 párů modrých a 7 párů šedých papučí, přitom páry papučí téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolik papučí musíme vytáhnout, abychom určitě mezi nimi měli a) dvě papuče stejné barvy, b) dvě papuče stejné barvy, které tvoří pár? [a) 4, protože papuče jsou tří barev. b) 19. V pytli je celkem $5 + 6 + 7 = 18$ párů papučí. Vytáhneme-li 18 papučí a nebude-li ještě mezi nimi pár téže barvy, bude to znamenat, že jsme od každé barvy vytáhli buď pouze levé, nebo pouze pravé papuče, a tedy buď všechny levé, nebo všechny pravé papuče. Proto po vytažení 19. papuče se zaručeně jeden pár téže barvy zkompletuje.]

D2. Na Ostrově Logiky patří každý jeho obyvatel buď mezi poctivce, kteří říkají vždy pravdu, nebo mezi lháře, kteří vždycky lžou. U stolu se sejdou tři obyvatelé tohoto ostrova – Oliver, Pavel a Romana. Oliver řekne: „Mezi námi není ani jeden poctivec.“ Pavel dodá: „Mezi námi je právě jeden poctivec.“ Je Romana poctivec, nebo lhář? [Lhář. Uvažte nejprve, do které skupiny patří Oliver, pak do které Pavel.]

D3. Na Ostrov Logiky z úlohy D2 zavítá turista, který si najme místního průvodce. Při cestě uvidí v dáli dalšího domorodce. Turista za ním vyšle svého průvodce, aby se jej zeptal, zda je poctivcem, nebo lhářem. „Tvrdí, že je poctivec,“ přinese zprávu průvodce. Je průvodce poctivec, nebo lhář? [Poctivec. Uvažte, že každý obyvatel ostrova o sobě tvrdí, že je poctivec.]

Výroky poctivců a lhářů proslavila dodnes populární kniha s názvem *Jak se jmenuje tahle knížka?*, kterou napsal Raymond Smullyan. Najdete v ní řadu logických hříček, paradoxů a hádanek, nejen z ostrova poctivců a lhářů. Stejnému tématu se věnuje i text *Poctivci, lháři a matematici* od Mirka Olšáka.

* Jak k řešení této, tak i mnoha podobných úloh lze využít *Dirichletův princip*, zvaný též *přihrádkový princip*. Více se můžete dozvědět v brožurce Lva Bukovského *Dirichletov princíp*.

4. *Kolik uspořádaných čtveřic přirozených čísel* (a,b,c,d) *se součtem* 100 *splňuje rovnice*

$$(a+b)(c+d)=(b+c)(a+d)=(a+c)(b+d)?$$

(Patrik Bak)

Řešení. Nejprve ekvivalentně upravíme první rovnici ze zadání:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)&=(b+c)(a+d),\\ ac+ad+bc+bd&=ba+bd+ca+cd,\\ ad+bc-ab-cd&=0,\\ a(d-b)-c(d-b)&=0,\\ (a-c)(d-b)&=0.\end{aligned}$$

Podobně zjistíme, že druhá rovnice je ekvivalentní s rovnicí, kterou pro přehled zapíšeme s upravenou první rovnicí vedle sebe:

$$(a-c)(d-b)=0,\quad (a-b)(d-c)=0.$$

Podle toho, které ze čtyř činitelů se v odvozených rovnicích rovnají nule, jsou všechna řešení (a,b,c,d) zadaných rovnic čtveřice jednoho ze čtyř typů:

▷ $a-c=0$ a $a-b=0$, neboli $a=b=c$ a d je libovolné,
▷ $a-c=0$ a $d-c=0$, neboli $a=c=d$ a b je libovolné,
▷ $d-b=0$ a $a-b=0$, neboli $a=b=d$ a c je libovolné,
▷ $d-b=0$ a $d-c=0$, neboli $b=c=d$ a a je libovolné.

Došli jsme k závěru, že rovnice ze zadání platí právě tehdy, když alespoň tři z čísel a, b, c, d jsou si rovna. Rozlišíme nyní, zda stejná čísla ve čtveřici (a,b,c,d) jsou čtyři, nebo tři.

- Pokud jsou si rovna všechna čtyři čísla, podmínce $a+b+c+d=100$ vyhovuje jediná čtveřice $a=b=c=d=25$.
- Pokud mají tři čísla stejnou hodnotu x a čtvrté má jinou hodnotu y, podmínka $a+b+c+d=100$ přejde v rovnici $3x+y=100$, kterou uvažujeme v oboru přirozených čísel splňujících podmínku $x\neq y$. Z ekvivalentní rovnice $y=100-3x$ plyne, že číslo y je kladné jen pro $x=1,2,\ldots,33$, přitom podmínka $y\neq x$ je splněna, pokud $x\neq 25$. Máme tedy nejprve $33-1=32$ možností pro výběr čísla x a poté 4 možnosti, kterému ze čtyř čísel a, b, c, d přiřadíme hodnotu $y=100-3x$ (a třem ostatním tak hodnotu x). Počet vyhovujících čtveřic (a,b,c,d) s právě třemi stejnými čísly je tedy roven $32\cdot 4=128$.

Celkový počet vyhovujících čtveřic je tedy $1+128$ čili 129.

Poznámka. Nad rámec zadání jsme zjistili, že 128 vyhovujících čtveřic je tvaru $(x,x,x,100-3x)$, $(x,x,100-3x,x)$, $(x,100-3x,x,x)$, resp. $(100-3x,x,x,x)$, kde $x=1,2,\ldots,33$ kromě $x=25$, a zbylá 129. vyhovující čtveřice je $(25,25,25,25)$.

Komentář. Práci s dvojicí rovnic

$$(a+b)(c+d) = (b+c)(a+d) \quad \text{a} \quad (b+c)(a+d) = (a+c)(b+d)$$

se shodnými stranami $(b+c)(a+d)$ si lze usnadnit pozorováním, že druhou rovnici dostaneme z první, když v ní písmena b, c navzájem vyměníme.* Jakmile tedy první rovnici upravíme do tvaru $(a-c)(d-b) = 0$ a provedeme v něm výměnu $b \leftrightarrow c$, dostaneme bez výpočtů ekvivalentní tvar $(a-b)(d-c) = 0$ druhé rovnice.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu. [Jediná hodnota 18. Platí $77 = ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d)$ a přitom $77 = 7 \cdot 11$. Oba činitelé $a+c$ a $b+d$ jsou větší než 1, takže jsou v nějakém pořadí rovny prvočíslům 7 a 11. Tak či onak platí $(a+c)+(b+d) = 18$. Zbývá uvést nějakou vyhovující čtveřici. Je jí například $(a,b,c,d) = (1,1,6,10)$.]

N2. Předpokládejme, že navzájem různá reálná čísla a, b, c, d splňují nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Pokud a je z těchto čtyř čísel největší, které z nich je nejmenší? [Číslo c. První zadanou nerovnost upravte do tvaru $(a-c)(b-d) > 0$, druhou do tvaru $(b-a)(c-d) > 0$. Pokud je a z daných čtyř čísel největší, platí $a-c > 0$ a $b-a < 0$, takže z odvozených nerovností plyne $b-d > 0$ a $c-d < 0$, neboli $b > d$ a $c < d$, celkově $a > b > d > c$.]

D1. Najděte všechny čtveřice $a > b > c > d$ celých čísel se součtem 71, která splňují rovnici

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = 26.$$

[Levou straně upravte na součin dvou mnohočlenů. Kompletní řešení: 71–C–S–3.]

D2. Určete všechny možné hodnoty součtu $a+b+c+d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2) + (b^2-d^2)(c^2-a^2) = 2021.$$

[Levou stranu upravte na součin čtyř mnohočlenů. Kompletní řešení: 71–C–I–6.]

D3. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách. [31. Jsou-li a, b čísla na přední a zadní stěně, c, d čísla na horní a dolní stěně a konečně e, f čísla na levé a pravé stěně, pak roznásobením součinu $(a+b)(c+d)(e+f)$ dostaneme osm sčítanců, kterými jsou právě čísla připsaná vrcholům krychle (v každém vrcholu se stýkají tři stěny, po jedné z popsaných tří dvojic stěn). Podle zadání je tak součin tří čísel $a+b$, $c+d$ a $e+f$ větších než 1 roven číslu 1001, což je součin tří prvočísel 7, 11 a 13. Platí tedy $\{a+b, c+d, e+f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a+b+c+d+e+f = 7+11+13 = 31$.]

D4. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$. [K oběma stranám rovnice přičtěte číslo 1, abyste pak levou stranu mohli rozložit na součin dvou mnohočlenů. Kompletní řešení: 67–B–I–4.]

* Zmíněný součin $(b+c)(a+d)$ se nezmění ani při výměně $b \leftrightarrow c$, ani při výměně $a \leftrightarrow d$. Našemu účelu může posloužit kterákoli z obou výměn.

5. *Na tabuli jsou napsána čísla* 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. *V každém kroku čísla* a, b, c *napsaná na tabuli smažeme a nahradíme je součiny* ab, bc, ca. *Zjistěte, zda po několika krocích bude znovu některé z čísel napsaných na tabuli přirozené.* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Dokážeme, že žádné přirozené číslo už se neobjeví.

Po prvním kroku dostaneme čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$. Po druhém kroku dostaneme čísla $\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$, $\sqrt{2\cdot 6}=2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3\cdot 6}=3\sqrt{2}$. Vidíme, že je to „až na násobky a pořadí" stejná trojice čísel jako po prvním kroku (vyznačili jsme je modře). Vysvětlíme, že trojici takového typu dostaneme i po každém dalším kroku.*

Předpokládejme tedy, že po určitém počtu kroků jsou na tabuli zapsána tři čísla tvaru $r\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ a $t\sqrt{6}$, kde r, s, t jsou vhodná přirozená čísla. Pak po následujícím kroku budou na tabuli čísla

$$(r\sqrt{2})\cdot(s\sqrt{3})=rs\sqrt{6},$$
$$(s\sqrt{3})\cdot(t\sqrt{6})=3st\sqrt{2},$$
$$(t\sqrt{6})\cdot(r\sqrt{2})=2rt\sqrt{3},$$

tedy opět čísla tvaru $r'\sqrt{2}$, $s'\sqrt{3}$ a $t'\sqrt{6}$, tentokrát s přirozenými čísly $r'=3st$, $s'=2rt$ a $t'=rs$.

Dokázali jsme, že po každém kroku, počínaje prvním, bude na tabuli trojice čísel $r\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ a $t\sqrt{6}$ s vhodnými přirozenými čísly r, s, t (měnícími se po každém kroku). Protože čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ jsou iracionální (viz úlohu N3), žádný z jejich násobků $r\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ a $t\sqrt{6}$ není celé číslo. Tím je tvrzení z úvodu řešení dokázáno.

Jiné řešení. Ke stejném závěru jako v prvním řešení dospějeme, když si předně uvědomíme, že každé číslo, které se kdy na tabuli objeví, bude tvaru $\sqrt{2^x\cdot 3^y}$, kde x a y jsou celá nezáporná čísla. Jistě to platí na začátku: $1=\sqrt{2^0\cdot 3^0}$, $\sqrt{2}=\sqrt{2^1\cdot 3^0}$ a $\sqrt{3}=\sqrt{2^0\cdot 3^1}$. Poté již stačí při každém kroku (třikrát) využít poznatku, že součin dvou čísel uvažovaného tvaru, řekněme $\sqrt{2^x\cdot 3^y}$ a $\sqrt{2^u\cdot 3^v}$, je opět číslo téhož tvaru:

$$\sqrt{2^x\cdot 3^y}\cdot\sqrt{2^u\cdot 3^v}=\sqrt{2^{x+u}\cdot 3^{u+v}}. \tag{1}$$

Zajímá nás otázka, kdy je číslo tvaru $\sqrt{2^x\cdot 3^y}$ celé. Je téměř zřejmé, že to nastane, právě když oba exponenty x a y jsou sudá čísla.** I když to využijeme až v poslední větě řešení, jsme už nyní motivováni k tomu, abychom zkoumali parity exponentů x a y v zápisech $\sqrt{2^x\cdot 3^y}$ všech čísel, která se budou na tabuli postupně objevovat. Výhodně k tomu použijeme symbolů L a S pro všechna lichá, resp. všechna sudá čísla. Jasný význam pak mají rovnosti $L+L=S$, $L+S=L$, $S+L=L$ a $S+S=S$, kde v každé z nich mohou symboly L, S na různých místech značit různá čísla (příslušné parity).

Po prvním kroku máme na tabuli čísla $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$ a $c=\sqrt{6}$, u kterých jsou dvojice (x,y) exponentů v zápisech $\sqrt{2^x\cdot 3^y}$ rovny po řadě $(1,0)$, $(0,1)$ a $(1,1)$. Užitím symbolů L a S tak zapíšeme, že po prvním kroku jsou na tabuli tři čísla $a=\sqrt{2^L\cdot 3^S}$, $b=\sqrt{2^S\cdot 3^L}$ a $c=\sqrt{2^L\cdot 3^L}$. K obdobnému zápisu tří čísel ab, bc a ca, které budou na

* Poznamenejme, že na výsledek žádného kroku zřejmě nemá vliv, v jakém pořadí jsou aktuální čísla na tabuli zapsána.

** Tento poznatek není nutné v jinak úplném řešení zdůvodňovat. Přesto ho v obecnějším podobě uvádíme v návodné úloze N2 i s důkazem.

tabuli po druhém kroku, už konkrétní hodnoty a, b, c nepotřebujeme. Podle pravidla (1) a pravidel ze závěru předchozího odstavce totiž platí

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{2^L \cdot 3^S} \cdot \sqrt{2^S \cdot 3^L} = \sqrt{2^{L+S} \cdot 3^{S+L}} = \sqrt{2^L \cdot 3^L}, \\ bc &= \sqrt{2^S \cdot 3^L} \cdot \sqrt{2^L \cdot 3^L} = \sqrt{2^{S+L} \cdot 3^{L+L}} = \sqrt{2^L \cdot 3^S}, \\ ca &= \sqrt{2^L \cdot 3^L} \cdot \sqrt{2^L \cdot 3^S} = \sqrt{2^{L+L} \cdot 3^{L+S}} = \sqrt{2^S \cdot 3^L}. \end{aligned}$$

Vidíme, že po druhém kroku – stejně jako prvním kroku – jsou na tabuli opět tři čísla různých typů $\sqrt{2^L \cdot 3^S}$, $\sqrt{2^S \cdot 3^L}$ a $\sqrt{2^L \cdot 3^L}$. Z trojice posledních výpočtů je jasné, že stejné tři typy čísel budou na tabuli i po třetím kroku, po čtvrtém kroku, atd., tj. po libovolném konečném počtu kroků. Po žádném kroku se proto na tabuli neobjeví číslo čtvrtého typu $\sqrt{2^S \cdot 3^S}$, a tedy ani žádné přirozené číslo.

Poznámka. Obě podaná řešení jsou v podstatě založena na stejné myšlence. Vysvětlují to rovnosti, které dostaneme částečným odmocněním výrazů, se kterými jsme pracovali v druhém řešení:

$$\begin{aligned} \sqrt{2^L \cdot 3^S} &= \sqrt{2^{2u+1} \cdot 3^{2v}} = \big(2^u \cdot 3^v\big)\sqrt{2}, \\ \sqrt{2^S \cdot 3^L} &= \sqrt{2^{2w} \cdot 3^{2x+1}} = \big(2^w \cdot 3^x\big)\sqrt{3}, \\ \sqrt{2^L \cdot 3^L} &= \sqrt{2^{2y+1} \cdot 3^{2z+1}} = \big(2^y \cdot 3^z\big)\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Po každém kroku tak obdržíme trojici čísel tvaru $r\sqrt{2}$, $s\sqrt{3}$ a $t\sqrt{6}$, jak jsme vysvětlili v prvním řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažujme přirozená čísla od 1 do 10 (včetně). Kolik nejvíce z nich můžeme mezi sebou vynásobit, aby druhá odmocnina z jejich součinu byla rovna přirozenému číslu? [9. Prvočíslo 7 v součinu být nemůže, mělo by mezi jeho prvočiniteli jediný výskyt. Součin devíti ostatních čísel je roven $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, což je $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$.]

N2. Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že číslo $\sqrt{n}$ je celé, právě když v rozkladu čísla n na prvočinitele má každé prvočíslo sudý počet výskytů. [Je-li kladné číslo $k = \sqrt{n}$ celé, z rovnosti $k^2 = n$ plyne, že počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla n je dvojnásobkem jeho výskytů v rozkladu čísla k, a tedy číslo sudé. Je-li naopak počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla n sudý, pak to celé číslo, které má ve svém rozkladu poloviční počty těchto výskytů, je zřejmě rovno $\sqrt{n}$.]

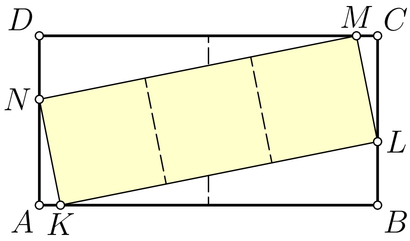
N3. a) Dokažte, že rovnost $a^2 = 2b^2$ neplatí pro žádná přirozená čísla a, b.
b) Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální, tj. že se nerovná žádnému zlomku a/b s přirozenými čísly a, b.
c) Dokažte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ jsou iracionální. [a) V rozkladu čísel a^2 a $2b^2$ na prvočinitele má prvočíslo 2 sudý, resp. lichý počet výskytů, takže $a^2 \neq 2b^2$. b) Z rovnosti $\sqrt{2} = a/b$ by vyplynula rovnost $a^2 = 2b^2$ z části a). c) Kdyby se zlomek a/b rovnal jednomu z čísel $\sqrt{3}$ nebo $\sqrt{6}$, platilo by $a^2 = 3b^2$, resp. $a^2 = 6b^2$. Počet výskytů prvočísla 3 v rozkladu čísla a^2 je sudý, v rozkladu obou čísel $3b^2$ i $6b^2$ je lichý, tudíž $a^2 \neq 3b^2$ i $a^2 \neq 6b^2$.]

D1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $\sqrt{n}$ buď celé, nebo iracionální. [Stačí ukázat, že pokud číslo $\sqrt{n}$ není iracionální, tj. je rovno některému zlomku a/b s přirozenými čísly a a b, pak $\sqrt{n}$ je číslo celé. Skutečně, z rovnosti $\sqrt{n} = a/b$ upravené na $a^2 = nb^2$ plyne, že počet výskytů každého prvočísla v rozkladu čísla n je sudý, neboť je rozdílem dvou sudých počtů jeho výskytů v rozkladech a^2 a b^2. Podle N2 to znamená, že $\sqrt{n}$ je celé číslo.]

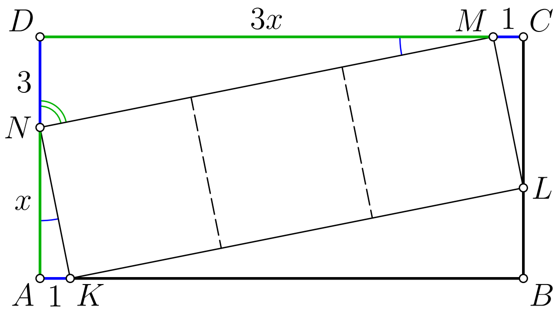
D2. Přirozené číslo n je takové, že číslo $6n^2 + 5n + 1$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte, že také obě čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ jsou druhými mocninami přirozených čísel. [Nechť $2n+1 = a$, $3n+1 = b$ a $6n^2+5n+1 = c^2$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Povšimněme si, že čísla a, b jsou nesoudělná (neboť je s nimi zřejmě nesoudělný jejich rozdíl $b - a = n$) a přitom platí $ab = c^2$. Odtud plyne: Každé prvočíslo dělící a nebo b dělí pouze jedno z nich a má v rozkladu tohoto čísla stejný počet výskytů jako v rozkladu čísla c^2, což je sudé číslo. Obě čísla a, b tak jsou druhými mocninami. (Příklad existuje: $n = 40$, kdy $2n + 1 = 9^2$ a $3n + 1 = 11^2$.)]

D3. Na tabuli je napsáno n různých přirozených čísel od 1 do n. V jednom kroku smažeme nějaká dvě čísla a místo nich napíšeme velikost (tj. absolutní hodnotu) jejich rozdílu. Pokračujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane jediné číslo. Pro která čísla n bude toto poslední číslo liché nezávisle na tom, v jakém pořadí budeme čísla mazat? [Pro ta přirozená n, která po dělení čtyřmi dávají zbytek 1 nebo 2, tedy n rovná 1, 2, 5, 6, 9, 10, atd. Sledujme, jak se změní aktuální počet k lichých čísel napsaných na tabuli po následném kroku. Pokud při něm smažeme dvě lichá čísla, napíšeme místo nich číslo sudé, tudíž počet k se zmenší o 2. Pokud smažeme jedno číslo sudé a druhé liché, napíšeme místo nich číslo liché, a tak se počet k nezmění. Ke změně k nedojde ani ve zbylém případě, kdy smažeme dvě sudá čísla, neboť místo nich napíšeme číslo sudé. Celkově vidíme, že po žádném kroku nezměníme paritu čísla k. Poslední číslo tudíž vyjde liché právě tehdy, když je úvodem na tabuli lichý počet lichých čísel (bez ohledu na postup mazání). Počet lichých čísel od 1 do n je v případě $n = 4k$ roven $2k$, v případech $n = 4k+1$ a $n = 4k+2$ je roven $2k + 1$, konečně v případě $n = 4k + 3$ je roven $2k + 2$.]

6. *Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou dány po řadě body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Vypočtěte poměr obsahů obdélníků $ABCD$ a $KLMN$.* (Josef Tkadlec)



ŘEŠENÍ. Dokážeme, že pravoúhlé trojúhelníky AKN a DNM jsou podobné. Protože úhel KNM je pravý, úhly KNA a DNM se doplňují do 90°. Totéž ale platí o úhlech DNM a NMD pravoúhlého trojúhelníku DNM. Dostáváme tak shodnost ostrých úhlů KNA a NMD, a tak jsou trojúhelníky AKN a DNM podle věty *uu* skutečně podobné. Poměr jejich podobnosti určíme jako poměr délek jejich přepon $|NM| : |KN|$, který je jakožto poměr $|KL| : |LM|$ dle zadání roven $3 : 1$.



Analogicky se zdůvodní vzájemná podobnost všech čtyř pravoúhlých trojúhelníků AKN, DNM, CML a BLK, které „obklopují" obdélník $KLMN$. Trojúhelníky AKN a CML (stejně jako DNM a BLK) jsou dokonce shodné, protože jejich přepony jsou protějšími stranami obdélníku.

Bez újmy na obecnosti jsme délku úsečky AK označili na obrázku číslem 1 a délku úsečky AN písmenem x. Z dokázaných podobností a shodností pak máme $|DN| = 3$, $|DM| = 3x$ a $|CM| = 1$, a tedy $|AB| = |CD| = 3x+1$ a $|BC| = |AD| = x+3$. Dosazením do zadaného poměru $|AB| : |BC| = 2 : 1$ dostaneme rovnici $(3x+1) = 2(x+3)$ s jediným řešením $x = 5$, kterému odpovídá $|AB| = 16$ a $|BC| = 8$. Obdélník $ABCD$ o obsahu $S_{ABCD} = 16 \cdot 8 = 128$ je sjednocením obdélníku $KLMN$ s trojúhelníky AKN, CML (ty mají dohromady obsah $1 \cdot 5 = 5$) a trojúhelníky DNM, BLK (s celkovým obsahem $3 \cdot 15 = 45$). Proto pro obsah obdélníku $KLMN$ platí $S_{KLMN} = 128 - 5 - 45 = 78$.* Získáváme tak odpověď $S_{KLMN} : S_{ABCD} = 78 : 128 = 39 : 64$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

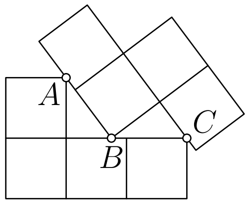
N1. Ve čtverci $ABCD$ zvolme uvnitř strany AB libovolně bod K a uvnitř strany BC libovolně bod L. Na polopřímce CD zvolme bod M tak, aby $|\sphericalangle KLM| = 90°$. Dokažte, že trojúhelníky BLK a CML jsou podobné. [Ukažte, že oba trojúhelníky mají shodné vnitřní úhly.]

N2. Na stranách AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$ postupně zvolíme body K, L, M, N tak, že $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MD| = |DN| : |NA| = 2 : 1$. a) Dokažte, že $KLMN$ je čtverec. b) Určete poměr obsahů čtverců $KLMN$ a $ABCD$. [a) Podle zadání mají pravoúhlé trojúhelníky AKN, BLK, CMN a DNM shodné dvojice odvěsen, takže

* Jiný výpočet: $|KN| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, $|KL| = 3|KN| = 3\sqrt{26}$, $S_{KLMN} = |KL| \cdot |KN| = 78$.

jsou shodné podle věty *sus*. Mají tedy shodné i přepony a dvojice ostrých vnitřních úhlů. Čtyřúhelník $KLMN$ tak má všechny strany shodné a všechny vnitřní úhly pravé – například rovnost $|\sphericalangle KLM| = 90°$ plyne z toho, že ostré úhly BLK a MLC se doplňují do $90°$. b) $5 : 9$. Nechť výhodně $|AB| = 3$. Pak $S_{ABCD} = 9$ a shodné pravoúhlé trojúhelníky AKN, BLK, CMN a DNM mají odvěsny délek 1 a 2. Obsah každého z nich je 1, tudíž $S_{KLMN} = 9 - 4 \cdot 1 = 5$.]

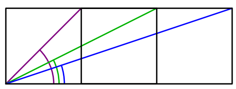
D1. Dvě tetrisové kostičky sestavené ze čtverců o rozměrech 1×1 se dotýkají v bodech A, B, C jako na obrázku. Spočtěte $|AB|$.



[$|AB| = 5/4$. Na obrázku vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky s přeponami AB a BC, které mají jednu odvěsnu délky 1 a shodné k ní přilehlé vnitřní úhly. Tyto dva trojúhelníky jsou tudíž podle věty *usu* shodné. Označme x délku jejich druhé odvěsny. Pak $|AB| = |BC| = 2 - x$ a Pythagorova věta dává rovnici $1^2 + x^2 = (2 - x)^2$, odkud $x = 3/4$, a proto $|AB| = 2 - x = 5/4$.]

D2. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD postupně v bodech F, G. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [$12 : 3 : 5$. Hledejte podobné trojúhelníky. Zdůvodněte, že $\triangle ABG \sim \triangle CDG$ a $\triangle AEF \sim \triangle CDF$. Z první podobnosti plyne $|AG| : |CG| = 3 : 1$, ze druhé $|AF| : |FC| = 3 : 2$. Zbytek je „trocha počítání“. Kompletní řešení: 64–C–I–4.]

D3. Na obrázku jsou vyznačeny úhly mezi úhlopříčkou a stranou ve třech pravoúhelnících 3×1, 2×1 a 1×1. Dokažte, že součet těchto tří úhlů je roven $90°$.



[Trikově zobrazíme vykreslenou úhlopříčku obdélníku 3×1 podle osy dané jeho „dolní“ stranou délky 3. Zdůvodněte, že tato nová úsečka je přeponou pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku, jehož jedna z odvěsen je vykreslená úhlopříčka obdélníku 2×1. Zjistíme tak, že součet dvou ze tří zadaných úhlů je $45°$.]