Úlohy krajského kola kategorie A

1. Tabulku 3×3 vyplníme navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Poté vypočteme součet čísel v každém ze čtyř čtverců 2×2 a tyto čtyři součty zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda tak můžeme získat posloupnost

a) 24, 24, 25, 25,

b) 20, 23, 26, 29.

2. Určete všechny dvojice (k, n) přirozených čísel, pro něž existují přirozená čísla a, b taková, že platí

$$\mathrm{D}(a + k, b) = n \cdot \mathrm{D}(a, b),$$

kde $\mathrm{D}(x, y)$ značí největší společný dělitel přirozených čísel x a y.

3. Nechť k je kružnice opsaná danému ostroúhlému trojúhelníku ABC. Uvažujme vnitřní bod P toho oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A. Označme Q průsečík úseček AP a BC, dále O_1 a O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům BPQ a CPQ. Dokažte, že pokud přímka O_1O_2 prochází některým vrcholem trojúhelníku ABC, pak jeden z bodů O_1, O_2 leží na kružnici k.

4. Součet 74 (ne nutně různých) reálných čísel z intervalu $\langle 4, 10\rangle$ je 356. Určete největší možnou hodnotu součtu jejich druhých mocnin.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 16. ledna 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Tabulku* 3×3 *vyplníme navzájem různými přirozenými čísly od* 1 *do* 9. *Poté vypočteme součet čísel v každém ze čtyř čtverců* 2×2 *a tyto čtyři součty zapíšeme vzestupně. Rozhodněte, zda tak můžeme získat posloupnost*

a) 24, 24, 25, 25,

b) 20, 23, 26, 29. (Tomáš Bárta)

ŘEŠENÍ. Před vlastním výkladem řešení poznamenejme, že oba součty čísel v zadaných čtveřicích $(24,24,25,25)$ a $(20,23,26,29)$ jsou rovny témuž číslu 98. Jak ukážeme v řešení části b), je to nejvyšší možná hodnota takového součtu, které navíc dosáhneme právě u těch tabulek, jež mají číslo 9 uprostřed a čísla 1, 2, 3, 4 v rozích. Tento poznatek rovněž usnadňuje konstrukci potřebného příkladu tabulky pro řešení části a).

a) Ano, například pro tabulku z obrázku. Je snadné ověřit, že součty čísel ve čtvercích 2×2 mají požadované hodnoty 24, 24, 25 a 25.

1	8	2
6	9	5
3	7	4

b) Ne. K důkazu uvážíme hodnoty součtů S, které dostaneme sečtením čtyř součtů ze čtverců 2×2 každé vyplněné tabulky. Do součtu S přispívá jedno číslo tabulky čtyřikrát (nazveme ho „středovým“), čtyři její čísla dvakrát (čísla „postranní“) a zbylá čtyři čísla jedenkrát (čísla „rohová“). Proto součet S bude největší možný, pokud největší číslo 9 bude středové, čtyři menší čísla 8, 7, 6, 5 postranní a čtyři nejmenší čísla 4, 3, 2, 1 rohová. Jen při takovém rozmístění čísel v tabulce dosáhneme hodnoty

$$S = 4\cdot9 + 2\cdot(8+7+6+5) + (4+3+2+1) = 98.$$

Protože v každém čtverci 2×2 jsou kromě čísla středového dvě čísla postranní a jedno číslo rohové, je v případě $S=98$ součet těchto čtyř čísel alespoň $9+5+6+1=21$, a tudíž se nemůže rovnat 20. Protože však pro čtveřici čísel ze zadání b) platí $20+23+26+29=98$, není to čtveřice součtů čísel ze čtverců 2×2 žádné vyplněné tabulky.

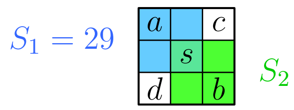
POZNÁMKA. Právě podané řešení části b) lze zkrátit užitím jednoduchého výsledku z úvodní části následujícího řešení, že totiž čtverec se součtem čísel 29 musí být vyplněn čísly 9, 8, 7, 5. V této situaci totiž pro uvažovaný součet S z prvního řešení dostáváme odhad

$$S \leqq 4\cdot9 + 2\cdot(8+7+6+4) + (5+3+2+1) = 97,$$

tudíž S nemůže mít potřebnou hodnotu $20+23+26+29=98$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Zápornou odpověď pro část b) dokážeme sporem odlišným způsobem, při kterém se obejdeme bez poznatku z úvodního odstavce k prvnímu řešení. K tomu dva čtverce 2×2 tabulky 3×3 nazveme „protějšími“, pokud mají společné právě jedno pole (uprostřed tabulky).

Připusťme, že vyplnění tabulky pro čtveřici součtů $(20,23,26,29)$ existuje. Jelikož $9+8+7+6=30$, leží ve čtverci 2×2 se součtem 29 právě čísla 9, 8, 7, 5. Vyberme dva protější čtverce tak, aby jeden z nich měl součet čísel $S_1=29$; součet v protějším čtverci



označíme S_2 a jako a, b (resp. c, d) označíme čísla v rozích celé tabulky, které jsou (resp. nejsou) do součtů S_1, S_2 zahrnuty, řekněme a do S_1 a b do S_2.

Pro číslo s uprostřed tabulky pak zřejmě platí

$$s = S_1 + S_2 + c + d - (1 + 2 + \ldots + 9) = 29 + S_2 + c + d - 45 = S_2 + c + d - 16.$$

Kdyby platilo $S_2 \geqq 23$, z poslední rovnosti bychom měli $s \geqq 7 + c + d$, což je spor, neboť $s \leqq 9$ a $c + d \geqq 3$. Platí tak nutně $S_2 = 20$, tedy zbylé dva protější čtverce mají součty $S_3 = 26$ a $S_4 = 23$. Z analogické rovnosti

$$s = S_3 + S_4 + a + b - (1 + 2 + \ldots + 9) = 26 + 23 + a + b - 45 = a + b + 4$$

s ohledem na $a \geqq 5$ (neboť a je jedno z čísel 9, 8, 7, 5) plyne $s > 9$, což je konečný spor.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho 2 body za část a), kde stačí tedy uvést příklad jedné vyplněné tabulky, a 4 body za část b). V neúplných řešeních části b) oceňte částečné kroky následovně (uvažujeme jen vyhovující tabulky a čtverce 2×2 v nich):

A1. Zdůvodnění, proč v tabulce je číslo 9 středové: 1 bod.

A2. Zdůvodnění, proč v tabulce jsou čísla 5, 6, 7, 8 postranními, resp. čísla 1, 2, 3, 4 rohovými: 1 bod.

B1. Zdůvodnění, proč protějšími čtverci jsou ty se součty 29 a 20, resp. 23 a 26: 1 bod.

B2. Vyjádření středového čísla pomocí součtů pro dva protější čtverce a dvou čísel, která do nich nepatří: 1 bod.

C1. Zdůvodnění, proč čtverec se součtem 29 je vyplněn čísly 9, 8, 7, 5: 1 bod.

Celkem pak za část b) udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2}, \mathrm{B1} + \mathrm{B2}) + \mathrm{C1}$ bodů.

2. *Určete všechny dvojice (k, n) přirozených čísel, pro něž existují přirozená čísla a, b taková, že platí*

$$D(a + k, b) = n \cdot D(a, b),$$

kde $D(x, y)$ *značí největší společný dělitel přirozených čísel* x *a* y. (Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že úloze vyhovují všechny dvojice přirozených čísel (k, n).

Pro $n = 1$ a libovolné k zvolíme $(a, b) = (k, k)$. Pak platí $D(a + k, b) = D(2k, k) = k$ a stejně tak i $D(a, b) = D(k, k) = k$, tudíž požadovaná rovnost je splněna.

Pro $n > 1$ a libovolné k platí $nk - k > 0$, a tak můžeme zvolit $(a, b) = (nk - k, nk)$. Pak platí

$$D(a + k, b) = D(nk, nk) = nk$$

a stejně tak i

$$n \cdot D(a, b) = n \cdot D(k(n - 1), kn) = nk \cdot D(n - 1, n) = nk,$$

kde jsme v poslední rovnosti využili fakt, že po sobě jdoucí přirozená čísla $n - 1$ a n jsou nesoudělná. Kýžená rovnost je tudíž opět splněna, čímž je celý důkaz ukončen.

Komentář. Uvedené řešení je úplné, nicméně neposkytuje žádný návod, jak se k němu dopracovat. Naznačíme jeden možný způsob, jak příklady potřebných dvojic čísel (a, b) hledat.

Řešme úlohu nejprve pro $k = 1$ a libovolné n, kdy máme najít příklad dvojice (a, b) s vlastností

$$D(a + 1, b) = n \cdot D(a, b). \tag{1}$$

Z této rovnosti plyne, že $D(a, b) \mid D(a + 1, b)$, takže číslo $D(a, b)$ musí být nejen dělitelem čísel a a b, ale také dělitelem čísla $a + 1$. Čísla a a $a + 1$ jsou však nesoudělná, takže musí platit $D(a, b) = 1$. Tehdy (1) přejde v $D(a+1, b) = n$, takže hledáme příklad nesoudělných čísel a, b s vlastností $D(a + 1, b) = n$. Najít takový příklad je snadné: v případě $n > 1$ vyhovuje dvojice $(a, b) = (n - 1, n)$, v případě $n = 1$ dvojice $(a, b) = (1, 1)$.

Přechod od hodnoty $k = 1$ k obecnému $k > 1$ založíme na následujícím pozorování, platném pro každé pevné n: Pokud pro nějaká čísla a, b platí (1), pak pro čísla $a' = ka$ a $b' = kb$ platí rovnost

$$D(a' + k, b') = n \cdot D(a', b'). \tag{2}$$

Ověřit rovnost (2) za předpokladu (1) je snadné:

$$\begin{aligned} D(a' + k, b') &= D(ka + k, kb) = k \cdot D(a + 1, b) = k \cdot (n \cdot D(a, b)) = \\ &= n \cdot (k \cdot D(a, b)) = n \cdot D(ka, kb) = n \cdot D(a', b'). \end{aligned}$$

Ze dvojice (a, b), která je příkladem řešení rovnice (1) s hodnotou $k = 1$, jsme tak dokázali „vyrobit“ příklad řešení (a', b') rovnice (2) s obecnou hodnotou k.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné závěry následovně:

A0. Existence čísel a, b pro konečně mnoho dvojic (k, n) nebo hypotéza o jejich existenci pro libovolnou dvojici (k, n): 0 bodů.

A1. Existence čísel a, b pro nekonečně mnoho dvojic (k, n), ve kterých $n \neq 1$: (typicky pro dvojice $(1, n)$): 1 bod.

A2. Existence čísel a, b pro nekonečně mnoho dvojic (k, n), ve kterých k i n nabývají nekonečně mnoha hodnot (například všechny případy $k = n$): 2 body.

A3. Existence čísel a, b chybí pouze pro konečný počet hodnot k či konečný počet hodnot n (typicky opomenutí či chybné řešení případu $n = 1$): 5 bodů.

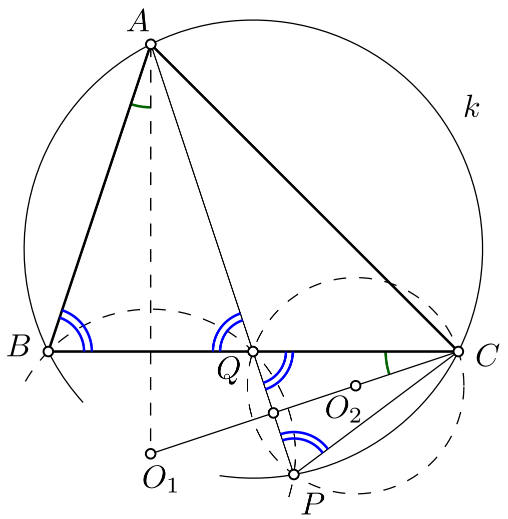
B1. Zdůvodnění, proč stačí řešit pouze případ $k = 1$ (viz komentář za řešením): 2 body.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{B1})$ bodů.

3. *Nechť k je kružnice opsaná danému ostroúhlému trojúhelníku ABC. Uvažujme vnitřní bod P toho oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A. Označme Q průsečík úseček AP a BC, dále O_1 a O_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům BPQ a CPQ. Dokažte, že pokud přímka O_1O_2 prochází některým vrcholem trojúhelníku ABC, pak jeden z bodů O_1, O_2 leží na kružnici k.* (Michal Janík)

Řešení. Kružnice se středy O_1 a O_2 mají společnou tětivu PQ. Přímka O_1O_2 je tak osou této úsečky a protne ji v jejím středu. Proto přímka O_1O_2 nemůže procházet vrcholem A, jelikož ten leží na přímce PQ, avšak nikoli uvnitř úsečky PQ. Upřesněme ještě, že díky ostroúhlosti trojúhelníku ABC oba středy O_1, O_2 zřejmě leží uvnitř poloroviny BCP.*

Abychom dokázali implikaci ze zadání úlohy, předpokládejme nejprve, že přímka O_1O_2 prochází vrcholem C.



V trojúhelníku PQC pak osa strany PQ prochází vrcholem C, tudíž tento trojúhelník je rovnoramenný s hlavním vrcholem C. Proto platí

$$|\sphericalangle BQA| = |\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CPA| = |\sphericalangle CBA|,$$

kde v posledním kroku jsme využili shodnost obvodových úhlů nad obloukem AC kružnice k. Trojúhelník BQA je tak rovnoramenný s hlavním vrcholem A. Oba body A a O_1 proto leží na ose úsečky BQ, odkud plyne

$$|\sphericalangle BAO_1| = 90° - |\sphericalangle ABQ| = 90° - |\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle BCO_1|.$$

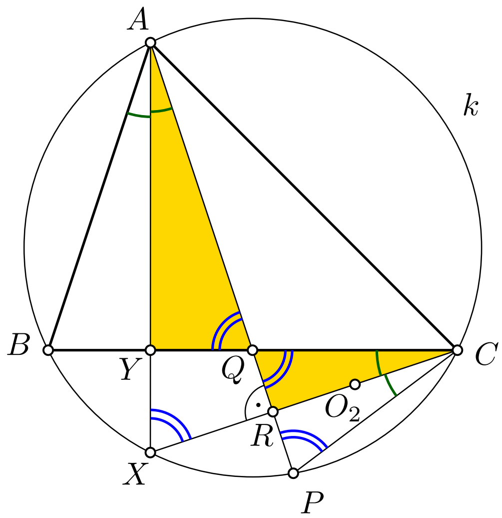
Úsečka BO_1 je tedy vidět z bodů A a C pod stejným úhlem, a čtveřice bodů B, O_1, C a A tudíž leží na jedné kružnici. Tím jsme dokázali potřebný závěr, že bod O_1 leží na kružnici k.

Ve druhém případě, kdy přímka O_1O_2 prochází vrcholem B, z analogického postupu plyne, že na kružnici k leží bod O_2. (Můžeme ovšem také navzájem vyměnit značení vrcholů B a C.) Tím je důkaz implikace ze zadání úlohy hotov.

* Úhly BPQ a CPQ jsou totiž oba ostré, neboť jsou shodné po řadě s úhly BCA a CBA.

Jiné řešení. Odlišným způsobem posoudíme výše rozebíraný případ, kdy přímka O_1O_2 prochází vrcholem C, takže je osou souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku PQC. K tomu uvážíme průsečík polopřímky CO_2 s kružnicí k, který označíme X jako na obrázku. Jistě stačí ukázat, že přímka AX je osou úsečky BQ, neboť s přihlédnutím k tomu, že přímka CX je osou úsečky PQ, pak už bude platit $X = O_1$, a tedy $O_1 \in k$.

Protože polopřímka CX je osou úhlu PCQ neboli PCB, je bod X středem toho oblouku BP kružnice k, který neprochází bodem C. Odtud plyne shodnost čtyř obvodových úhlů PCX, BCX, PAX a BAX. Označme ještě R střed úsečky PQ a Y průsečík úseček BQ a AX. Pak porovnáním vnitřních úhlů podbarvených trojúhelníků AQY a CQR zjišťujeme, že úhel AYQ je stejně jako úhel CRQ pravý. Osa AX úhlu BAQ je tedy kolmá k úsečce BQ, a proto přímka AX je osou této úsečky, jak jsme slíbili ukázat.



Dodejme, že právě podaný výklad lze obměnit například tak, že k odvození kolmosti $AX \perp BQ$ využijeme čtyřúhelník $XRQY$ nebo $AYRC$, u kterých lze ze shodnosti vhodných úhlů snadno nahlédnout, že jsou tětivové.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za konstatování (i bez důkazu), že na přímce O_1O_2 nemůže ležet vrchol A, a 5 bodů za vyřešení situace, kdy přímka O_1O_2 prochází vrcholem B nebo C. Další pokyny zapisujeme jen pro případ, kdy přímka O_1O_2 prochází vrcholem C jako v obou podaných řešeních.

V neúplných řešeních 5bodové části oceňte částečné kroky následovně. Tolerujte přitom absenci úvodní zmínky o tom, že středy O_1 a O_2 leží uvnitř poloroviny BCP.

Za postup podobný prvnímu řešení udělte 1 bod za důkaz rovnoramennosti trojúhelníku PQC a 2 body za důkaz rovnoramennosti trojúhelníku BQA. Pokud řešitel využívá tyto nebo jiné z nich plynoucí poznatky bez důkazů, udělte nejvýše 3 body z 5 možných bodů.

Za postup podobný druhému řešení udělte:

- ▷ 1 bod za zavedení průsečíku X s vyjádřeným úmyslem dokázat rovnost $O_1 = X$.
- ▷ 1 bod za důkaz, že zavedený bod X je středem oblouku BP.
- ▷ 2 body za důkaz, že úsečky AX a BQ jsou navzájem kolmé.

Pokud řešitel využívá tyto nebo jiné z nich plynoucí poznatky bez důkazů, udělte nejvýše 3 body z 5 možných bodů.

4. *Součet 74 (ne nutně různých) reálných čísel z intervalu $\langle 4, 10\rangle$ je 356. Určete největší možnou hodnotu součtu jejich druhých mocnin.* (Zdeněk Pezlar)

Řešení. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_{74}$ čísla ze zadání. Pro každé i z předpokladu $x_i \in \langle 4, 10\rangle$ zřejmě plyne $(x_i - 4)(10 - x_i) \geqq 0$, což po roznásobení dává $x_i^2 \leqq 14x_i - 40$. Sečtením těchto nerovností pro všechna $i = 1, 2, \ldots, 74$ s přihlédnutím k zadanému součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_{74} = 356$ získáme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{74}^2 \leqq 14(x_1 + x_2 + \ldots + x_{74}) - 40 \cdot 74 = 14 \cdot 356 - 40 \cdot 74 = 2024.$$

Tím je dokázána nerovnost $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{74}^2 \leqq 2024$. Rovnost v ní nastane, právě když je každé číslo x_i rovno čtyřem či deseti. Ukážeme-li, že taková skupina čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{74} \in \{4, 10\}$ se součtem rovným 356 existuje, budeme s řešením hotovi.

Nechť je hledaná skupina 74 čísel sestavena z c čtyřek a d desítek. Neznámé c a d tak mají splňovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c + d &= 74,\\ 4c + 10d &= 356. \end{aligned}$$

Snadným výpočtem najdeme *jediné* řešení $(c, d) = (64, 10)$. Skupina 74 čísel složená z 64 čtyřek a 10 desítek tak zaručuje, že 2024 je skutečně hledaná největší možná hodnota zkoumaného součtu.

Poznámka. Předložené řešení můžeme ještě upravit následujícím způsobem. Pro všechna i položme $y_i = x_i - 7$. Z předpokladu $x_i \in \langle 4, 10\rangle$ plyne $y_i \in \langle -3, 3\rangle$. Sečtením všech těchto 74 rovností vzhledem k podmínce ze zadání dostaneme, že součet všech čísel y_i je roven $356 - 74 \cdot 7 = -162$. Potom

$$\sum_{i=1}^{74} x_i^2 = \sum_{i=1}^{74} (y_i + 7)^2 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 + 14 \sum_{i=1}^{74} y_i + 74 \cdot 7^2 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 - 14 \cdot 162 + 74 \cdot 49 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 + 1358.$$

Vzhledem ke zřejmému odhadu $y_i^2 \leqq 9$* odtud opět plyne

$$\sum_{i=1}^{74} x_i^2 \leqq 74 \cdot 9 + 1358 = 2024,$$

kde rovnost nastane právě tehdy, když pro všechna i platí $y_i \in \{-3, 3\}$. Z rozkladu $-162 = 54 \cdot (-3)$ vidíme, že skupina takových čísel y_i splňující podmínku $y_1 + y_2 + \ldots + y_{74} = -162$ obsahuje 54 čísel -3 a $(74 - 54)/2 = 10$ dvojic $\{-3, 3\}$. Taková skupina je tak jediná, a obsahuje právě 64 čísel -3 a 10 čísel 3 (pro skupinu čísel x_i to znamená, že obsahuje 64 čísel 4 a 10 čísel 10).

Jiné řešení. Každou skupinu 74 čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{74} \in \langle 4, 10\rangle$ se součtem 356 nazveme *přípustnou skupinou.* Označíme pro ni jako S součet $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{74}^2$ a jako p počet těch indexů i, pro něž platí $x_i = 4$ nebo $x_i = 10$. Závěr, že největší možná

* Tento, nyní zřejmý, odhad znamená, že $9 \geqq (x_i - 7)^2 = x_i^2 - 14x_i + 49$, což je po úpravě nerovnost $x_i^2 \leqq 14x_i - 40$ odvozená v řešení.

hodnota S existuje* a je rovna 2024, vyplyne z následujících dvou tvrzení, jak vysvětlíme ještě před jejich důkazy.

1) *Přípustná skupina s hodnotou* $p \geqq 73$ *je (až na pořadí čísel) jediná. Je složena z* 10 *desítek a* 64 *čtyřek a součet* S *má pro ni hodnotu* 2024.
2) *Pro každou přípustnou skupinu s hodnotou* $p < 73$ *existuje přípustná skupina, která má obě hodnoty* S *a* p *větší.*

Podejme teď slíbené vysvětlení: Podle 1) stačí dokázat nerovnost $S < 2024$ pro libovolnou přípustnou skupinu s hodnotou $p < 73$. Uplatníme-li k ní opakovaně závěr 2), celkem nejvýše $(73 - p)$-krát, dostaneme se od výchozí skupiny k přípustné skupině s hodnotou $p \geqq 73$ a větší hodnotou S, která je podle 1) rovna právě číslu 2024.

Důkaz 1). Nebudeme opakovat důkaz toho, co jsme zjistili v předchozím řešení: Přípustná skupina s hodnotou $p = 74$ je jediná, je složena z 10 desítek a 64 čtyřek a součet S má pro ni hodnotu 2024. Tvrzení 1) tak platí, pokud neexistuje žádná přípustná skupina s hodnotou $p = 73$. Poslední dokážeme sporem.

Připusťme tedy, že přípustná skupina s hodnotou $p = 73$ existuje. Taková skupina je tedy složena z d desítek, $73 - d$ čtyřek a jednoho čísla x, kde $4 < x < 10$. Z rovnosti $10d + (73 - d) \cdot 4 + x = 356$ plyne $x = 64 - 6d$. Platí tedy

$$4 < 64 - 6d < 10 \quad \text{neboli} \quad 54 < 6d < 60.$$

To je už kýžený spor, neboť žádný násobek šesti v intervalu $(54, 60)$ neexistuje.**

Důkaz 2). Nechť přípustná skupina $x_1, x_2, \ldots, x_{74}$ má hodnotu p menší než 73. Aspoň dva členy této skupiny se tedy nerovnají ani 4 ani 10. Vyberme proto dva členy $x_i \leqq x_j$ s indexy $i \neq j$, které oba leží v otevřeném intervalu $(4, 10)$. Položme $c = \min(x_i - 4, 10 - x_j) > 0$ a v uvažované přípustné skupině nahraďme člen x_i menším číslem $x'_i = x_i - c$ a člen x_j větším číslem $x'_j = x_j + c$. Touto změnou zůstane jistě zachován součet 356 všech 74 čísel. Navíc díky výběru c nastává v platných nerovnostech $c \leqq x_i - 4$ a $c \leqq 10 - x_j$ aspoň jedna rovnost, tudíž oba nové členy x'_i a x'_j leží v intervalu $\langle 4, 10 \rangle$ a aspoň jeden z nich je roven 4 nebo 10. Nová skupina čísel je tedy přípustná a má oproti původní skupině větší hodnotu p počtu všech zastoupených čísel 4 a 10. Zbývá ověřit, že větší hodnotu má i součet S. Skutečně, součet čtverců dvou pozměněných členů se zvětší díky nerovnostem $c > 0$ a $x_j - x_i \geqq 0$ o hodnotu

$$(x_i - c)^2 + (x_j + c)^2 - \left(x_i^2 + x_j^2\right) = 2c(x_j - x_i) + 2c^2 > 0.$$

Tím je důkaz tvrzení 2) hotov.

Poznámka. Protože všech přípustných skupin 74 čísel je nekonečně mnoho, není existence největší možné hodnoty S samozřejmá, ani když ukážeme, že množina všech hodnot S je shora ohraničená. Bez důkazu této existence (lze k němu využít jeden výsledek matematické analýzy, totiž Weierstrassovu větu o spojité funkci několika proměnných, která je definována na kompaktní množině) nelze podané řešení vést zjednodušeným

* Pojednáme o tom ještě v poznámce za tímto řešením.

** Alternativní důkaz: Je-li 356 rovno součtu 73 čísel, z nichž každé je 4 nebo 10, a nějakého reálného čísla x, pak zřejmě x je celé a modulo 6 s ohledem na $10 \equiv 4$ dostáváme $356 \equiv 73 \cdot 4 + x$, tj. $2 \equiv 4 + x$ neboli $x \equiv 4$. Odtud za předpokladu $x \in \langle 4, 10 \rangle$ už plyne $x = 4$ nebo $x = 10$, tudíž případ $p = 73$ je skutečně vyloučen.

způsobem, při kterém se zabýváme pouze otázkou, jak musí vypadat každá přípustná skupina, pro kterou je součet S největší možný.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte dílčí kroky následovně:

A0. Správná odpověď bez zdůvodnění: 0 bodů.
A1. Důkaz nerovnosti $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{74}^2 \leqq 2024$: 5 bodů.
A2. Uvedení vyhovujícího příkladu, kdy $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{74}^2 = 2024$ (třeba i uhodnutím): 1 bod.
B1. Důkaz tvrzení 1) : 2 body, po 1 bodu za případy $p = 73$ a $p = 74$.
B2. Důkaz tvrzení 2): 3 body.
B3. Zdůvodnění, proč pro každou přípustnou skupinu s hodnotou $p < 73$ se najde přípustná skupina s větším součtem S a hodnotou $p \geqq 73$: 4 body.

Celkem pak udělte max[A1+A2, B1+max(B2, B3)] bodů. Za řešení, které využívá nedokázanou existenci největšího možného součtu, udělte nejvýše 4 body.