73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy školního kola kategorie C

1. Pažoutův průměr známek je přesně 3. Kdybychom tři z Pažoutových pětek do průměru nezapočítali, byl by průměr jeho známek přesně 2. Určete největší počet jedniček, které mohl Pažout dostat. (Možné známky jsou 1, 2, 3, 4, 5.)

2. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, se osy vnitřních uhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

3. Uvažujme libovolnou tabulku 3×3 vyplněnou kladnými celými čísly tak, že součet čísel v každém řádku i každém sloupci je 10. Kolik nejvíce čísel v takové tabulce může být: a) stejných, b) různých?

Školní kolo kategorie C se koná

v úterý 30. ledna 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Pažoutův průměr známek je přesně* 3. *Kdybychom tři z Pažoutových pětek do průměru nezapočítali, byl by průměr jeho známek přesně* 2. *Určete největší počet jedniček, které mohl Pažout dostat. (Možné známky jsou* 1, 2, 3, 4, 5.*)* (Patrik Bak)

Řešení. Označme s součet všech Pažoutových známek a p jejich počet. Ani jedno z těchto čísel neznáme, ale víme, že platí

$$\frac{s}{p} = 3 \quad \text{neboli} \quad s = 3p.$$

Podle druhé věty zadání sestavíme pro neznámé s, p další rovnici a rovnou ji upravíme:

$$\frac{s - 3 \cdot 5}{p - 3} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad s - 15 = 2p - 6 \quad \Leftrightarrow \quad s = 2p + 9.$$

Odtud po dosazení $s = 3p$ dostaneme rovnici $3p = 2p+9$ s jediným řešením $p = 9$. Součet známek je tak roven $s = 3p = 27$.

Kromě tří pětek tedy Pažout dostal ještě dalších šest známek se součtem rovným $27 - 3 \cdot 5 = 12$. Určitě to nemohlo být ani šest jedniček (se součtem pouze 6), ani pět jedniček, protože šestá známka by pak byla $12 - 5 \cdot 1 = 7$. Čtyři jedničky však Pažout dostat mohl, jeho zbývající dvě známky se součtem $12 - 4 = 8$ by pak byly buď dvě čtyřky, nebo trojka a pětka.

Závěr. Největší možný počet Pažoutových jedniček je 4.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě neúplných postupů oceňte dílčí kroky následovně:

A0. Uvedení správné odpovědi bez zdůvodnění: 0 bodů.

A1. Uvedení správné odpovědi spolu s vyhovujícím příkladem sady známek: 1 bod.

A2. Přepis slovního zadání úlohy do matematické symboliky (nejspíše do soustavy dvou rovnic o dvou neznámých): 1 bod.

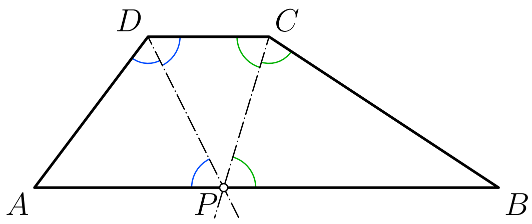
A3. Vyřešení matematické úlohy z bodu A2 nebo jiné zdůvodnění vedoucí k závěru, že Pažout dostal 9 známek (resp. 6 známek, pokud neuvažujeme tři pětky): 4 body.

A4. Zdůvodnění, proč Pažout nemohl dostat více než 4 jedničky: 5 bodů.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4}) + \mathrm{A1}$ bodů. V úplném řešení musí být zdůvodněno, že situace se čtyřmi jedničkami může skutečně nastat (nejspíše příkladem sady známek, jak je uvedeno v bodě A1).

2. *V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, se osy vnitřních uhlů při vrcholech C a D protínají na úsečce AB. Dokažte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.* (Patrik Bak)

Řešení. Uvažujme nejprve osu vnitřního úhlu při vrcholu D. Ta protne základnu AB v bodě, který označíme P. Osa úhlu příslušný úhel půlí, takže modře vyznačené úhly ADP a CDP jsou shodné. Díky $AB \parallel CD$ je s nimi shodný i úhel APD střídavý k úhlu CDP. Z rovnosti $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle APD|$ plyne, že trojúhelník ADP je rovnoramenný se základnou DP.



Dle zadání osa vnitřního úhlu při vrcholu C protíná základnu AB v témže bodě P. Analogicky jako výše se zdůvodní shodnost zeleně vyznačených úhlů, a tedy i rovnoramennost trojúhelníku BCP se základnou CP.

Využitím obou nalezených rovnoramenných trojúhelníků už dostáváme

$$|AD| + |BC| = |AP| + |BP| = |AB|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě neúplných postupů oceňte dílčí kroky následovně:

A1. Náčrtek, ve kterém se osy vnitřních úhlů při vrcholech C a D protnou na základně AB a ve kterém jsou vyznačeny oba páry shodných úhlů při vrcholech C i D (tolerujte, když shodnost těchto úhlů není zapsána v textu): 1 bod.

A2. Pozorování, že $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle PDC|$ nebo že $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle PCD|$: 2 body.

A3. Důkaz, že platí alespoň jedna z rovností $|AD| = |AP|$ či $|BC| = |BP|$ (též že alespoň jeden z trojúhelníků ADP, BCP je rovnoramenný): 3 body.

A4. Důkaz, že platí obě rovnosti $|AD| = |AP|$ i $|BC| = |BP|$ (též že oba trojúhelníky ADP, BCP jsou rovnoramenné): 4 body.

B1. Záznam myšlenky, že k důkazu tvrzení by stačilo, kdyby platilo $|AD| = |AP|$ a $|BC| = |BP|$: 2 body. Celkem pak udělte $\max(\text{A1}, \text{A2}, \text{A3}, \text{A4}) + \text{B1}$ bodů.

3. *Uvažujme libovolnou tabulku* 3×3 *vyplněnou kladnými celými čísly tak, že součet čísel v každém řádku i každém sloupci je* 10. *Kolik nejvíce čísel v takové tabulce může být: a) stejných, b) různých?* (Ján Mazák)

Řešení. a) Šest stejných čísel je například v této tabulce splňující podmínky úlohy:

8	1	1
1	8	1
1	1	8

Kdyby v tabulce bylo alespoň sedm stejných čísel, obsahoval by některý řádek tři z těchto sedmi stejných čísel. Součet tří stejných celých čísel ovšem nemůže být roven 10.

Závěr. Největší možný počet stejných čísel v tabulce je 6.

b) Tabulka může obsahovat šest různých čísel, jeden z mnohých příkladů* vypadá takto:

7	1	2
1	6	3
2	3	5

Zdůvodníme dále, že více než šest různých čísel tabulka obsahovat nemůže.

V tabulce se mohou nacházet pouze celá čísla od 1 do 8. Kdyby v ní totiž bylo číslo větší než 8, součet čísel v řádku s tímto číslem by byl alespoň $9+1+1$, což je více než 10.

Víme tedy, že kdyby bylo v tabulce aspoň sedm různých čísel, některým z nich by muselo být jedno z čísel 7 nebo 8. Obě možnosti teď posoudíme odděleně.

- ⋆ Přítomnost čísla 8 v tabulce znamená, že v řádku a sloupci s číslem 8 je po dvou číslech 1, takže v celé tabulce je nejvýše 6 různých čísel (kromě 8 a 1 to mohou být jen čísla ze 4 políček mimo zmíněný řádek a sloupec).
- ⋆ Přítomnost čísla 7 v tabulce znamená, že v řádku i sloupci s číslem 7 jsou v obou případech čísla 1 a 2. Z ostatních čtyř čísel tabulky označíme jako x to z nich, které leží v řádku jednoho ze dvou zmíněných čísel 1 a současně ve sloupci druhého z nich – viz obrázek, ve kterém jsou zbylá tři čísla označena puntíky.

1	7	2
$\bullet$	2	$\circ$
x	1	$\bullet$

V řádku i sloupci s čísly x a 1 musí jako třetí být číslo $9 - x$. Dva černé puntíky v obrázku tak značí stejné číslo, tudíž v tabulce je opět nejvýše šest různých čísel.

Závěr. Největší možný počet různých čísel v tabulce je 6.

Jiné řešení. Odlišným způsobem zdůvodníme, proč tabulka nemůže obsahovat sedm nebo více různých čísel.

Součet všech čísel v tabulce je zřejmě $3 \cdot 10 = 30$. Součet sedmi různých přirozených čísel je alespoň $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$. Najdeme-li proto v tabulce sedm různých čísel,

* Lze ukázat, že každá vyhovující tabulka se šesti různými čísly je vyplněna některou z devític čísel $(1,1,2,2,3,3,5,6,7)$, $(1,1,2,2,3,4,5,5,7)$, $(1,1,2,3,3,4,5,5,6)$ nebo $(1,2,2,3,3,4,4,5,6)$.

budou mít zbylá dvě čísla součet nejvýše $30 - 28 = 2$, takže se budou obě rovnat číslu 1 a ostatních sedm různých čísel v tabulce se součtem 28 budou nutně všechna čísla od 1 do 7. Zbývá tak posoudit, zda je možné tabulku správně vyplnit čísly $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. K tomu už stačí jen využít stejný poznatek jako v prvním řešení: V řádku i sloupci s číslem 7 jsou v obou případech čísla 1 a 2. To však odporuje tomu, že číslo 2 má být v tabulce pouze jedenkrát.

Poznámka. Ukažme, že existenci vyhovující tabulky s čísly $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ můžeme vyloučit i jinak.

V žádném řádku ani sloupci takové tabulky nemohou být dvě čísla 1, neboť $1+1+7 < 10$. Proto v každém řádku i sloupci je po jednom čísle 1. Jakékoli číslo $x \in \{2, 3, \ldots, 7\}$ proto má ve svém řádku i sloupci jedno číslo 1, tudíž třetím číslem tam je v obou případech číslo $9 - x$. Žádné číslo $9 - x$ však není k dispozici dvakrát.

○	1	○
○	●	1
1	x	●

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za část a) a 4 body za část b). V případě neúplných postupů oceňte dílčí kroky následovně (uvažujeme jen tabulky vyhovující zadání):

A1. Příklad tabulky se šesti stejnými čísly: 1 bod.
A2. Zdůvodnění, proč tabulka nemůže obsahovat více než šest stejných čísel: 1 bod.
Celkem za část a) pak udělte $\mathrm{A1} + \mathrm{A2}$ bodů.
B1. Příklad tabulky se šesti různými čísly: 1 bod.
B2. Zdůvodnění, proč tabulka nemůže obsahovat více než sedm různých čísel: 1 bod.
B3. Zdůvodnění, proč tabulka s číslem 8 obsahuje nejvýše šest různých čísel: 1 bod.
B4. Zdůvodnění, proč tabulka s číslem 7 obsahuje nejvýše šest různých čísel: 2 body.
B5. Zdůvodnění, proč tabulka s (alespoň) sedmi různými čísly by musela být vyplněna čísly 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: 2 body.
B6. Zdůvodnění, proč tabulka nemůže obsahovat více než šest různých čísel: 3 body.
Celkem za část b) pak udělte $\mathrm{B1} + \max(\mathrm{B2}, \mathrm{B3}, \mathrm{B4}, \mathrm{B5}, \mathrm{B6})$ bodů.