73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Ústřední kolo kategorie A

České Budějovice, 18. března 2024

1. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, pro něž se jedna z hodnot

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c),\qquad \mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a),\qquad \mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b)$$

rovná součinu zbylých dvou. Dokažte, že některé z čísel a, b, c je násobkem jiného z nich.

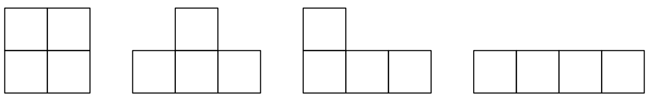
(Symbol $\mathrm{D}(x,y)$, resp. $\mathrm{n}(x,y)$ značí největší společný dělitel, resp. nejmenší společný násobek přirozených čísel x, y.)

2. Vnitřní bod P konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ splňuje rovnosti

$$|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle CPD|.$$

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPD. Dokažte, že $|OA| = |OB|$.

3. Určete největší přirozené číslo n s vlastností: Libovolnou sadu n tetramin, z nichž každé je jednoho ze čtyř tvarů na obrázku, lze bez překrývání umístit do tabulky 20×20 tak, že každé tetramino pokrývá právě čtyři pole tabulky. (Jednotlivá tetramina můžeme libovolně otáčet a překlápět.)



Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Ústřední kolo kategorie A

České Budějovice, 19. března 2024

4. Na párty se sešlo 10 chlapců a 10 dívek. Každému chlapci se líbí jiný kladný počet dívek. Každé dívce se líbí jiný kladný počet chlapců. Určete největší celé číslo n s následující vlastností: Vždy lze utvořit aspoň n disjunktních párů, v nichž se oběma líbí ten druhý.

5. Posloupnost reálných čísel $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty}$ splňuje pro každý index $k \geqq 1$ rovnost

$$a_{k+1} = 3a_k - \lfloor 2a_k \rfloor - \lfloor a_k \rfloor.$$

Určete všechna přirozená čísla n, pro která je taková posloupnost s prvním členem $a_1 = 1/n$ od jistého členu konstantní.

(Zápisem $\lfloor x \rfloor$ rozumíme největší celé číslo, které nepřevyšuje dané reálné číslo x.)

6. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, do nichž lze vepsat dvě shodné kružnice s prvočíselným poloměrem, které mají vnější dotyk, obě se dotýkají přepony a každá z nich se dotýká jiné odvěsny.

Soutěžící má na vypracování úloh 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu může získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou.

1. *Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, pro něž se jedna z hodnot*

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(b,c),\qquad \mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(c,a),\qquad \mathrm{D}(c,a)\cdot \mathrm{n}(a,b)$$

rovná součinu zbylých dvou. Dokažte, že některé z čísel a, b, c je násobkem jiného z nich.

(Symbol $\mathrm{D}(x,y)$, resp. $\mathrm{n}(x,y)$ značí největší společný dělitel, resp. nejmenší společný násobek přirozených čísel x, y.) (Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec)

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí například

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(b,c) = (\mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(c,a))\cdot(\mathrm{D}(c,a)\cdot \mathrm{n}(a,b)) = s, \tag{1}$$

kde s je vhodné přirozené číslo. Užitím známého vztahu $\mathrm{D}(x,y)\cdot\mathrm{n}(x,y) = xy$, který platí pro všechna přirozená čísla x a y, dostaneme

$$\begin{aligned}(abc)^2 &= (ab)\cdot(bc)\cdot(ca) = (\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(a,b))\cdot(\mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(b,c))\cdot(\mathrm{D}(c,a)\cdot \mathrm{n}(c,a)) =\\ &= (\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(b,c))\cdot(\mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(c,a)\cdot \mathrm{D}(c,a)\cdot \mathrm{n}(a,b)) = s\cdot s = s^2,\end{aligned}$$

a tedy po odmocnění $abc = s$. Nyní si povšimneme, že

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(b,c) = s = a\cdot(bc) = a\cdot \mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(b,c),$$

odkud po vydělení $\mathrm{n}(b,c)$ dostáváme $\mathrm{D}(a,b) = a\cdot \mathrm{D}(b,c)$. Z poslední rovnosti už vidíme, že $a \mid \mathrm{D}(a,b) \mid b$, a tudíž b je násobkem a, jak jsme potřebovali dokázat.

Jiné řešení. Označme $v_p(x)$ exponent u prvočísla p v prvočíselném rozkladu daného přirozeného čísla x. Předpokládejme opět, že platí rovnost (1) jako v prvním řešení. Pak pro každé prvočíslo p máme

$$v_p\left(\mathrm{D}(a,b)\cdot \mathrm{n}(b,c)\right) = v_p\left(\mathrm{D}(b,c)\cdot \mathrm{n}(c,a)\cdot \mathrm{D}(c,a)\cdot \mathrm{n}(a,b)\right).$$

Pokud při pevném p položíme $\alpha = v_p(a)$, $\beta = v_p(b)$ a $\gamma = v_p(c)$, můžeme zapsanou rovnost opakovaným užitím pravidla $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ a známých vzorců

$$v_p(\mathrm{D}(x,y)) = \min(v_p(x), v_p(y)),\quad v_p(\mathrm{n}(x,y)) = \max(v_p(x), v_p(y))$$

přepsat jako

$$\min(\alpha,\beta) + \max(\beta,\gamma) = \min(\beta,\gamma) + \max(\gamma,\alpha) + \min(\gamma,\alpha) + \max(\alpha,\beta).$$

To lze s ohledem na $\max(\gamma,\alpha) + \min(\gamma,\alpha) = \alpha + \gamma$ ještě zjednodušit na

$$\min(\alpha,\beta) + \max(\beta,\gamma) = \min(\beta,\gamma) + (\alpha+\gamma) + \max(\alpha,\beta).$$

Nyní si všimneme, že pokud by platilo $\alpha > \beta$, získali bychom po sečtení zřejmých nerovností $\min(\alpha,\beta) < \max(\alpha,\beta)$, $\max(\beta,\gamma) < \alpha+\gamma$ a $0 \leqq \min(\beta,\gamma)$ spor s odvozenou rovností. Proto platí $\alpha \leqq \beta$.

Ukázali jsme, že pro libovolné prvočíslo p platí $v_p(a) \leqq v_p(b)$, odkud již plyne, že b je násobkem a.

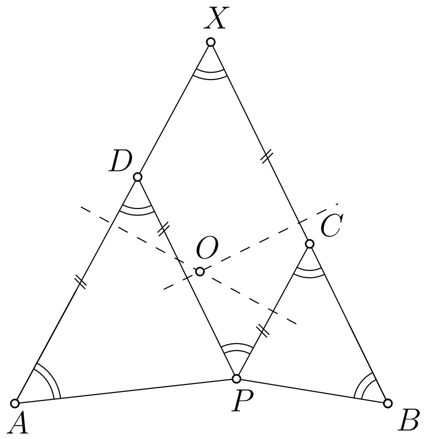
2. *Vnitřní bod P konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ splňuje rovnosti*

$$|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle CPD|.$$

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPD. Dokažte, že $|OA| = |OB|$.

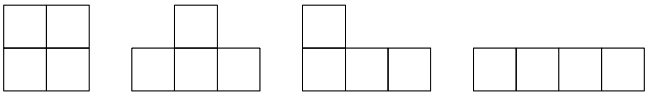
(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Ze zadaných rovností střídavých úhlů plyne $PC \parallel AD$ a $PD \parallel BC$. Jelikož přímky PC a PD jsou různé, a tedy různoběžné, platí, že i přímky AD a BC jsou různoběžné. Označme X jejich průsečík. Čtyřúhelník $PCXD$ je pak zřejmě rovnoběžník, a proto platí i $|\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle CXD|$.



Ve čtyřúhelníku $AXCP$ platí $AX \parallel CP$ a $|\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle CXA|$, jedná se proto o rovnoramenný lichoběžník. Osa jeho základny CP, na níž leží i střed O ze zadání, je tedy totožná s osou druhé základny AX. Platí tak $|OA| = |OX|$. Analogicky užitím rovnoramenného lichoběžníku $BXDP$ získáme rovnost $|OB| = |OX|$. Dohromady dostáváme $|OA| = |OX| = |OB|$, a úloha je tak vyřešena.

3. *Určete největší přirozené číslo n s vlastností: Libovolnou sadu n tetramin, z nichž každé je jednoho ze čtyř tvarů na obrázku, lze bez překrývání umístit do tabulky 20×20 tak, že každé tetramino pokrývá právě čtyři pole tabulky. (Jednotlivá tetramina můžeme libovolně otáčet a překlápět.)*



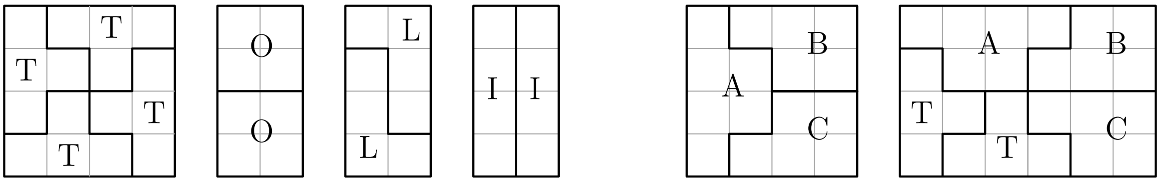
(Josef Tkadlec)

Řešení. Ukážeme, že hledané největší číslo n je rovno 99. V průběhu řešení budeme typy tetramin z obrázku nazývat postupně O, T, L a I.

V první části řešení uvedeme příklad sady 100 tetramin, kterou nelze do tabulky 20×20 vyhovujícím způsobem umístit. Bude to pak zřejmě znamenat, že žádné přirozené číslo $n \geqq 100$ požadovanou vlastnost nemá.

Vezměme sadu 100 tetramin složenou z 99 tetramin typu O a jednoho tetramina typu T. Obarvíme-li tabulku 20×20 jako šachovnici, bude v ní stejný počet bílých i černých polí, totiž $20^2 : 2 = 200$. Umístíme-li pak do tabulky nejprve jakkoli našich 99 tetramin typu O, bude jimi pokryto 198 bílých a 198 černých polí, neboť každé z nich pokryje 2 bílá a 2 černá pole. Bez pokrytí tak zůstanou některá 2 bílá a některá 2 černá pole, která však nelze pokrýt zbylým tetraminem typu T – jeho umístěním totiž vždy pokryjeme 3 pole téže barvy. Tím je první část řešení hotova.

Ve druhé části řešení dokážeme, že číslo $n = 99$ požadovanou vlastnost má. Popíšeme totiž postup, jak lze libovolnou sadu 99 tetramin do tabulky 20×20 vyhovujícím způsobem umístit. Využijeme k tomu následující obrázky.



$k = 3$ $k = 5$

Z obrázků vlevo vidíme, jak čtyřmi tetraminy typu T vyplnit čtverec 4×4 a jak každými dvěma tetraminy jednoho ze tří typů O, L, I vyplnit obdélník 4×2. Všechny takové čtverce a všechny takové obdélníky, které můžeme z dané sady 99 tetramin sestavit, budeme poté do tabulky postupně ukládat (nejprve všechny čtverce, až poté obdélníky) po vrstvách výšky čtyř řádků. Jelikož jsou řádky tvořeny 20 poli, což je násobek čtyř, bude každá nová vrstva započata, jen pokud je předchozí vrstva vyplněna beze zbytku. Uvědomme si, že v okamžiku, kdy již žádný obdélník 4×2 k uložení do tabulky nemáme k dispozici, platí následující skutečnosti.

- Sada všech zbylých, tj. dosud neumístěných tetramin, kterou označíme $\mathcal{Z}$, je podmnožinou sady $1\times$O, $1\times$L, $1\times$I, $3\times$T. Pro počet k tetramin v sadě $\mathcal{Z}$ tak platí $k \leqq 6$.
- Jelikož jsme $99 - k$ tetraminy v uložených čtvercích a obdélnících pokryli celkem $4(99 - k) = 400 - 4(k + 1)$ polí tabulky, nepokryto tak zůstalo $4(k + 1)$ jejích polí.

- Obdélníky a čtverci jsme postupně pokrývali vrstvy tabulky o 80 polích beze zbytků, proto dosud nepokrytá pole o počtu $4(k+1)$, který je díky $k \leqq 6$ menší než 80, tvoří část poslední vrstvy tabulky, tedy její podtabulku o rozměrech $4 \times (k+1)$.
- Počet $99-k$ tetramin v umístěných čtvercích a obdélnících je nutně sudé číslo, tudíž číslo $k \leqq 6$ je liché, a proto $k \in \{1, 3, 5\}$.

Zbývá nám tak umístit k tetramin tvořících sadu $\mathcal{Z}$ do tabulky $4 \times (k+1)$. Rozlišíme tři případy podle hodnoty $k \in \{1, 3, 5\}$, přitom pro $k = 3$ a $k = 5$ využijeme rozdělení tabulky $4 \times (k+1)$ se zastoupením útvarů A, B a C, které jsou vykresleny na obrázcích. Uplatníme přitom tyto zřejmé poznatky: tetramino kteréhokoli typu lze umístit do tabulky 4×2 i do útvaru A, zatímco do útvarů B a C lze umístit tetramino každého z typů O, L, T.

Případ $k = 1$. Do příslušné tabulky 4×2 umístíme to tetramino, které tvoří celou sadu $\mathcal{Z}$.

Případ $k = 3$. Do útvaru A umístíme jedno tetramino ze sady $\mathcal{Z}$, přitom dáme přednost typu I, je-li zastoupen. Zbylá dvě tetramina ze sady $\mathcal{Z}$ umístíme po jednom do útvarů B a C, ať už jsou kteréhokoli z typů O, L, T.

Případ $k = 5$. Sada $\mathcal{Z}$ pak obsahuje dvě nebo tři tetramina typu T. Dvě z nich umístíme podle obrázku. Zbylá tři tetramina ze sady $\mathcal{Z}$ umístíme po jednom do útvarů A, B a C, přitom do útvaru A typ I, je-li v $\mathcal{Z}$ zastoupen.

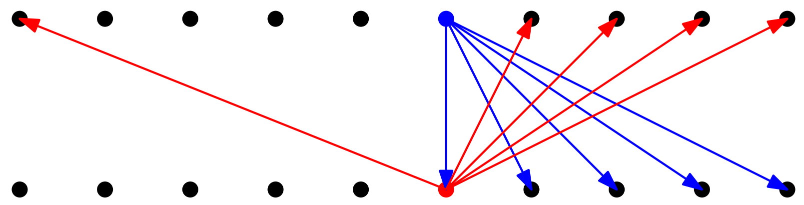
Tím je i druhá část řešení hotova.

4. *Na párty se sešlo* 10 *chlapců a* 10 *dívek. Každému chlapci se líbí jiný kladný počet dívek. Každé dívce se líbí jiný kladný počet chlapců. Určete největší celé číslo* n *s následující vlastností: Vždy lze utvořit aspoň* n *disjunktních párů, v nichž se oběma líbí ten druhý.*
(Josef Tkadlec)

Řešení. Dokážeme, že hledané největší n je rovno 1.

V první části řešení ukážeme, že jeden vyhovující pár lze vždy utvořit. Podle zadání jsou počty dívek líbících se jednotlivým chlapcům všechna čísla od 1 do 10 (v nějakém pořadí). Totéž platí i pro počty chlapců líbících se jednotlivým dívkám. Jednomu chlapci se tak líbí všech 10 dívek a jedné dívce všech 10 chlapců, takže tento chlapec a tato dívka tvoří vyhovující pár.

Ve druhé části řešení uvedeme příklad párty splňující podmínky zadání, při kterém neexistují dva disjunktní páry s oboustranným zalíbením. K jeho konstrukci rozestavme chlapce do horní řady a dívky pod ně do spodní řady jako na obrázku.



Předpokládejme, že platí to, co je na obrázku vyznačeno šipkami pro šestého chlapce i šestou dívku zleva: Každému chlapci se líbí právě dívka pod ním spolu se všemi dívkami napravo od ní, zatímco každé dívce se líbí právě chlapec první zleva spolu se všemi chlapci napravo od chlapce nad touto dívkou. Pak se zřejmě každému chlapci líbí jiný počet dívek a každé dívce jiný počet chlapců, avšak ve všech (deseti) párech s oboustranným zalíbením je zastoupen jediný chlapec – ten první zleva. Proto žádné dva takové páry nejsou disjunktní.

5. *Posloupnost reálných čísel* $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty}$ *splňuje pro každý index* $k \geqq 1$ *rovnost*

$$a_{k+1} = 3a_k - \lfloor 2a_k \rfloor - \lfloor a_k \rfloor .$$

Určete všechna přirozená čísla n*, pro která je taková posloupnost s prvním členem* $a_1 = 1/n$ *od jistého členu konstantní.*

(Zápisem $\lfloor x \rfloor$ *rozumíme největší celé číslo, které nepřevyšuje dané reálné číslo* x*.)*

(Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Zaveďme výhodně funkci $f(x) = 3x - \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Posloupnost ze zadání je pak určena členem a_1 a pravidlem $a_{k+1} = f(a_k)$. Proto ze zřejmých rovností $f(1) = f(0) = 0$ a $f(1/2) = 1/2$ plyne, že tato posloupnost je od nějakého členu konstantní, pokud je v ní zastoupeno číslo 1 nebo 1/2.

Jelikož na intervalu $0 < x < 1/2$ platí $f(x) = 3x$, je zastoupení čísla 1, resp. 1/2 v naší posloupnosti čísel a_k zaručeno, pokud platí $a_1 = 1/3^{\alpha}$, resp. $a_1 = 1/(2 \cdot 3^{\alpha})$, kde α značí (zde i dále) nezáporné celé číslo. Vidíme tak, že mezi hledaná přirozená čísla n patří všechny hodnoty $n = 3^{\alpha}$ a $n = 2 \cdot 3^{\alpha}$. Ve zbytku řešení ukážeme, že jiná vyhovující n neexistují.

K tomu bude stačit, když pro každé vyhovující n najdeme α s vlastností $n \mid 2 \cdot 3^{\alpha}$. Zafixujme tedy jedno vyhovující n a kromě posloupnosti (a_k) s prvním členem $a_1 = 1/n$ uvažme novou posloupnost (b_k) se členy $b_k = n \cdot a_k$. Pak $b_1 = 1$ a rekurentní vztah $a_{k+1} = f(a_k)$ po vynásobení číslem n přejde v

$$b_{k+1} = 3b_k - n \left\lfloor \frac{2b_k}{n} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{b_k}{n} \right\rfloor .$$

Odtud indukcí plyne, že každé číslo b_k je celé a navíc platí kongruence (zde i v dalším odstavci modulo n) $b_{k+1} \equiv 3b_k$, odkud (opět indukcí) $b_k \equiv 3^{k-1}$ pro každé k.

Jelikož n je vyhovující, je posloupnost (a_k) od nějakého členu konstantní, takže totéž platí i pro posloupnost (b_k). Pro jisté α tak máme $b_{\alpha+2} = b_{\alpha+1}$, což spolu s $b_{\alpha+2} \equiv 3b_{\alpha+1}$ vede k $2b_{\alpha+1} \equiv 0$. Dohromady s $b_{\alpha+1} \equiv 3^{\alpha}$ už dostáváme $2 \cdot 3^{\alpha} \equiv 0$ neboli $n \mid 2 \cdot 3^{\alpha}$, jak jsme slíbili ukázat.

Závěr. Hledaná čísla n jsou právě tvarů $n = 3^{\alpha}$ a $n = 2 \cdot 3^{\alpha}$, kde α je nezáporné celé číslo.

JINÉ ŘEŠENÍ. Uvažme znovu funkci $f(t) = 3t - \lfloor 2t \rfloor - \lfloor t \rfloor$. Najdeme dokonce všechna *reálná* čísla a_1, pro něž je posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, ve které platí $a_{k+1} = f(a_k)$ pro každé $k \geqq 1$, od jistého členu konstantní. To zřejmě nastane, právě když bude platit $f(a_k) = a_k$ pro některé $k \geqq 1$, právě tehdy pak totiž budeme mít $a_i = a_k$ pro každé $i \geqq k$.

Pro analýzu podmínky $f(a_k) = a_k$ odvodíme nejprve potřebné vlastnosti funkce f. Označme k tomu $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.* Předpis pro funkci f upravíme takto:

$$f(t) = 3t - \lfloor 2t \rfloor - \lfloor t \rfloor = (2t - \lfloor 2t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor) = \{2t\} + \{t\} . \qquad (1)$$

Vidíme, že funkce f má periodu 1, takže pro libovolná $t \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{Z}$ platí $f(t) = f(t+m)$. Odtud volbou $t = \{2x\} + \{x\}$ a $m = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ dostaneme z (1) pro hodnotu $f(f(x))$ s libovolným $x \in \mathbb{R}$ vyjádření

$$f(f(x)) = f(\{2x\} + \{x\}) = f(\{2x\} + \{x\} + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor) = f(2x + x) = f(3x). \qquad (2)$$

* Hodnota $\{t\}$ se běžně nazývá *zlomková část* daného reálného čísla t.

Zjistěme nyní, pro která $t \in \mathbb{R}$ platí rovnost $f(t) = t$. Díky (1) máme

$$f(t) = t \Leftrightarrow \{2t\} + \{t\} = t \Leftrightarrow \{2t\} = t - \{t\} \Leftrightarrow \{2t\} = \lfloor t \rfloor .$$

Jelikož $\{2t\} \in \langle 0, 1)$ a $\lfloor t \rfloor \in \mathbb{Z}$, rovnost $f(t) = t$ nastane, právě když bude platit $\{2t\} = \lfloor t \rfloor = 0$. To zřejmě splňují jedině čísla $t = 0$ a $t = 1/2$.

S ohledem na poslední závěr ještě určíme ta čísla $t \in \mathbb{R}$, pro která je hodnota $f(t)$ rovna 0 nebo 1/2. Všimněme si nejdříve, že podle (1) platí $f(t) = 3t$ pro každé $t \in \langle 0, 1/2)$ a $f(t) = 3t - 1$ pro každé $t \in \langle 1/2, 1)$. Odtud pro obecné $t \in \mathbb{R}$ s ohledem na $f(t) = f(\{t\})$ a $\{t\} \in \langle 0, 1)$ zřejmě plynou ekvivalence

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \{t\} = 0 \quad \text{a} \quad f(t) = 1/2 \Leftrightarrow \{t\} = 1/6 \vee \{t\} = 1/2. \tag{3}$$

Díky provedeným úvahám o funkci f rovnost $f(a_k) = a_k$ ze závěru prvního odstavce nastane, právě když a_k (a tedy i a_{k+1}) bude jedno z čísel 0 nebo 1/2. Využijeme rovností (2), podle kterých platí $f(a_k) = f(3^{k-1}a_1)$, takže hledáme právě ta a_1, pro která je hodnota $f(3^{k-1}a_1)$ rovna 0 nebo 1/2. To je podle (3) ekvivalentní s tím, že hodnota $\{3^{k-1}a_1\}$ je jedno z čísel 0, 1/6 nebo 1/2. Při označení $m = \lfloor 3^{k-1}a_1 \rfloor$ tak všechna hledaná a_1 jsou právě ta čísla, která mají pro některá celá $k \geqq 1$ a m jedno z vyjádření

$$a_1 = \frac{m}{3^{k-1}}, \quad a_1 = \frac{6m+1}{2 \cdot 3^k}, \quad a_1 = \frac{2m+1}{2 \cdot 3^{k-1}}.$$

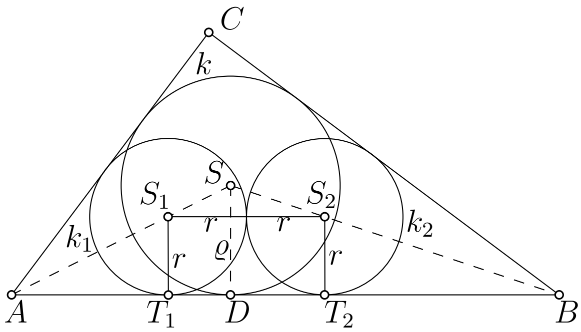
Dodejme ještě, že množiny čísel určené první a třetí rovností jsou zřejmě disjunktní. Druhou rovnost lze v odpovědi vynechat, neboť zadává jen čísla, která jsou také určena třetí rovností, jak plyne z úpravy

$$\frac{6m+1}{2 \cdot 3^k} = \frac{2 \cdot 3m + 1}{2 \cdot 3^{(k+1)-1}}.$$

6. *Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, do nichž lze vepsat dvě shodné kružnice s prvočíselným poloměrem, které mají vnější dotyk, obě se dotýkají přepony a každá z nich se dotýká jiné odvěsny.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že hledaný trojúhelník je jediný, má strany délek 21, 28, 35 a dotyčné dvě kružnice mají poloměr rovný prvočíslu 5.

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označíme $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$. Jistě existují dvě shodné kružnice se všemi dotyky popsanými v zadání. Označme je $k_1(S_1, r)$ a $k_2(S_2, r)$ tak, aby se k_1 dotýkala AC (a tedy k_2 zase BC) a body jejich dotyku s AB označme T_1, resp. T_2 jako na obrázku. Uvažme ještě kružnici $k(S, \varrho)$ vepsanou trojúhelníku ABC a označme D bod dotyku k s AB.



V první části řešení ukážeme, že poloměr r kružnic k_1 a k_2 je určen rovností

$$r = \frac{c(a+b-c)}{2(a+b)}. \tag{1}$$

Ve stejnolehlosti se středem v bodě A s koeficientem r/ϱ, která zobrazí k na k_1, přejde bod D do bodu T_1. Platí tak $|AT_1| = |AD| \cdot r/\varrho$. Analogicky platí i rovnost $|BT_2| = |BD| \cdot r/\varrho$. Jelikož z obdélníku $T_1T_2S_2S_1$ plyne $|T_1T_2| = |S_1S_2| = 2r$, po dosazení do pravé strany zřejmé rovnosti $c = |AT_1| + |T_1T_2| + |BT_2|$ s přihlédnutím k $|AD| + |BD| = c$ obdržíme

$$c = |AD| \cdot \frac{r}{\varrho} + 2r + |BD| \cdot \frac{r}{\varrho} = 2r + (AD| + |BD|) \cdot \frac{r}{\varrho} = 2r + \frac{cr}{\varrho}.$$

Odtud pro poloměr r vychází vyjádření

$$r = \frac{c\varrho}{c + 2\varrho}.$$

Po dosazení známého vzorce $\varrho = (a + b - c)/2$ a snadné úpravě již získáme avizovanou rovnost (1).

Předpokládejme nyní, že délky a, b, c, r jsou vyjádřeny celými čísly a položme $k = \mathrm{D}(a, b, c)$. Pak $a = ka_1$, $b = kb_1$ a $c = kc_1$, kde díky Pythagorově rovnosti $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ jsou čísla a_1, b_1, c_1 dokonce po dvou nesoudělná a první dvě z nich mají různou paritu*.

* Součet kvadrátů dvou lichých čísel je sudé číslo, které není dělitelné čtyřmi, tudíž to není kvadrát.

Třetí číslo c je tudíž liché, a proto číslo $a_1 + b_1 - c_1$ je sudé. Dosazením $a = ka_1$, $b = kb_1$ a $c = kc_1$ do (1) a následném krácení číslem k obdržíme

$$r = \frac{kc_1(a_1 + b_1 - c_1)}{2(a_1 + b_1)} = \frac{k}{a_1 + b_1} \cdot c_1 \cdot \frac{a_1 + b_1 - c_1}{2}. \tag{2}$$

Dokažme, že nejen druhý, ale i první zlomek na pravé straně (2) má celočíselnou hodnotu. Pokud totiž nějaké prvočíslo p dělí liché číslo $a_1 + b_1$, pak pak nemůže platit $p \mid c_1$ (a tedy ani $p \mid a_1 + b_1 - c_1$), jinak by díky rovnosti $(a_1 + b_1)^2 = c_1^2 + 2a_1b_1$ platilo $p \mid a_1b_1$, což by spolu s $p \mid a_1 + b_1$ znamenalo $p \mid a_1$ a $p \mid b_1$, tedy spor s nesoudělností čísel a_1, b_1. Číslo $a_1 + b_1$ je tak nesoudělné jak s c_1, tak s $a_1 + b_1 - c_1$, a proto díky celočíselnosti r je v jeho vyjádření (2) i první zlomek celočíselný.

Teprve nyní doplňme předpoklad, že r je prvočíslo. To je podle (2) součinem tří přirozených čísel. S ohledem na $c_1 > a_1 \geqq 1$ tak nutně platí $c_1 = r$ a dva zlomky na pravé straně (2) mají hodnotu 1. Platí tedy rovnosti $k = a_1 + b_1$ a $a_1 + b_1 - c_1 = 2$ neboli $k = a_1 + b_1 = c_1 + 2 = r + 2$. Odtud plyne

$$2a_1b_1 = (a_1 + b_1)^2 - c_1^2 = (r + 2)^2 - r^2 = 4r + 4.$$

Po vydělení dvěma dostáváme

$$a_1b_1 = 2r + 2 = 2(a_1 + b_1 - 2) + 2 = 2a_1 + 2b_1 - 2.$$

Poslední rovnost $a_1b_1 = 2a_1 + 2b_1 - 2$ lze přepsat do tvaru $(a_1 - 2)(b_1 - 2) = 2$. Odtud snadno plyne, že $\{a_1, b_1\} = \{3, 4\}$, a tedy $c_1 = r = a_1 + b_1 - 2 = 5$ a $k = r + 2 = 7$. Pro pravoúhlý trojúhelník se stranami $7 \cdot 3$, $7 \cdot 4$ a $7 \cdot 5$ pak skutečně platí $r = 5$. Tím je tvrzení z úvodní věty řešení dokázáno.