73. ročník Matematické olympiády (2023/2024)

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Pro každé z šesti po sobě jdoucích přirozených čísel větších než 1 určíme nejmenší prvočíslo, které jej dělí, a pak těchto šest prvočísel sečteme. Může nám vyjít a) 23, b) 25?

2. Na tabuli jsou napsána čtyři čísla $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$. V každém kroku jedno číslo z tabule smažeme a nahradíme ho součinem některých dvou ze zbylých tří čísel. Zjistěte, zda lze postupovat tak, aby po několika krocích byla na tabuli jen celá čísla.

3. Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou dány po řadě body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Na jeho stranách KL, LM, MN, NK jsou opět dány po řadě body W, X, Y, Z tak, že $WXYZ$ je obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami obdélníku $ABCD$. Vypočtěte poměr $|XY| : |YZ|$.

4. Určete počet uspořádaných čtveřic (a, b, c, d) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, která zároveň splňují rovnosti

$$ab = cd, \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

(Například uspořádaná čtveřice $(1, 2, 3, 1)$ je jiná než uspořádaná čtveřice $(2, 3, 1, 1)$.)

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 9. dubna 2024

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času; případné dotazy k textu zadání mohou být zodpovězeny v prvních 20 minutách. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. *Pro každé z šesti po sobě jdoucích přirozených čísel větších než 1 určíme nejmenší prvočíslo, které jej dělí, a pak těchto šest prvočísel sečteme. Může nám vyjít a)* 23, *b)* 25*?* (Eliška Macáková)

Řešení. Mezi každými šesti po sobě jdoucími čísly jsou právě tři sudá (ta do součtu přispějí třikrát prvočíslem 2) a právě dvě dělitelná třemi, z nichž jedno je liché (to přispěje prvočíslem 3) a druhé je sudé (jeho příspěvek prvočíslem 2 už jsme započítali). Zbylá dvě z těchto šesti čísel přispějí prvočísly p a q, z nichž každé je větší než 3.

a) Jediná prvočísla p, q větší než 3, pro která platí $2+2+2+3+p+q=23$ neboli $p+q=14$, jsou $p=q=7$. To by ovšem znamenalo, že mezi šesti po sobě jdoucími čísly jsou dvě dělitelná sedmi. Taková situace nastat nemůže, protože dva různé násobky sedmi se liší nejméně o sedm. Součet 23 nám tedy vyjít nemůže.

b) Ano, může. Vyhovuje například šestice čísel 121, 122, 123, 124, 125 a 126, jejichž nejmenší prvočíselní dělitelé jsou po řadě 11, 2, 3, 2, 5 a 2, takže skutečně dávají požadovaný součet 25.

Komentář. Popíšeme, jak hledat čísla v části b). Využijeme k tomu úvahu z úvodu našeho řešení. Jediná prvočísla p, q větší než 3, pro která platí $2+2+2+3+p+q=25$ neboli $p+q=16$, jsou $p=5$ a $q=11$ (nebo naopak). V hledané šestici se tak musí nacházet číslo, jehož nejmenší prvočíselný dělitel je 11.

Zařadíme-li do šestice rovnou číslo 11, budou v ní z násobků 5 přítomna čísla 10 nebo 15 (mohou tam být i obě, ale žádná jiná). Ani jedno z těchto dvou čísel nám ale nemůže přispět prvočíslem 5, protože mají menší prvočíselné dělitele 2, resp. 3.

Druhé nejmenší číslo, které může přispět prvočíslem 11, je $11^2=121$. V jeho „okolí“ už najdeme vyhovujících šest čísel. Jelikož $119=7\cdot 17$, toto číslo zařadit nemůžeme. Připadá tak v úvahu šestice začínající číslem 120 nebo šestice začínající číslem 121. Tyto dvě šestice (obě s číslem $125=5^3$) vyhovují.

Dále části b) vyhovují například všechny šestice obsahující jak číslo $143=11\cdot 13$, tak i číslo $145=5\cdot 29$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Část a) je hodnocena 3 body, část b) také 3 body. Neúplná řešení hodnoťte následovně:

A1. Konstatování, že v každé šestici po sobě jdoucích čísel se nachází tři sudá čísla, která přispějí třikrát prvočíslem 2: 1 bod.

A2. Konstatování, že v každé šestici po sobě jdoucích čísel se nachází jedno liché číslo dělitelné třemi, které přispěje prvočíslem 3: 1 bod.

A3. Zdůvodnění, proč případ $p=q=7$ není možný: 1 bod.

B1. Nalezení libovolné vyhovující šestice v části b): 3 body.
Tolerujte, pokud je namísto ověření pouze konstatováno, že navržená šestice „zřejmě“ vyhovuje.

B2. Hledání vyhovující šestice v části b) v „okolí“ čísla 121 (případně jiné vhodné mocniny prvočísla 11 nebo 5), které kvůli numerické chybě skončí neúspěšně: 2 body.

B3. Pozorování, že v části b) je potřeba najít prvočísla p, q větší než 3 taková, že $p+q=16$: 1 bod.

Celkem udělte $\mathrm{A1}+\mathrm{A2}+\mathrm{A3}+\max(\mathrm{B1},\mathrm{B2},\mathrm{B3})$ bodů. Pokud řešitel postupuje námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

2. *Na tabuli jsou napsána čtyři čísla $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$. V každém kroku jedno číslo z tabule smažeme a nahradíme ho součinem některých dvou ze zbylých tří čísel. Zjistěte, zda lze postupovat tak, aby po několika krocích byla na tabuli jen celá čísla.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Ano, lze. Jednotlivé kroky pro čtveřice čísel zapsané ve sloupcích jsou znázorněny šipkou. Přeškrtnuté číslo je vždy nahrazeno součinem dvou podbarvených čísel.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\sqrt{11} & & \sqrt{11} & & \sqrt{11} & & \cancel{\sqrt{11}} & \to & 132 & & 132 & & 132 \\
\sqrt{12} & & \sqrt{12} & & \cancel{\sqrt{12}} & \to & 132 & & 132 & & 132 & & 132 \\
\sqrt{13} & & \cancel{\sqrt{13}} & \to & \sqrt{132} & & \sqrt{132} & & \sqrt{132} & & \cancel{\sqrt{132}} & \to & 132^2 \\
\cancel{\sqrt{14}} & \to & \sqrt{132} & & \sqrt{132} & & \sqrt{132} & & \cancel{\sqrt{132}} & \to & 132^2 & & 132^2
\end{array}$$

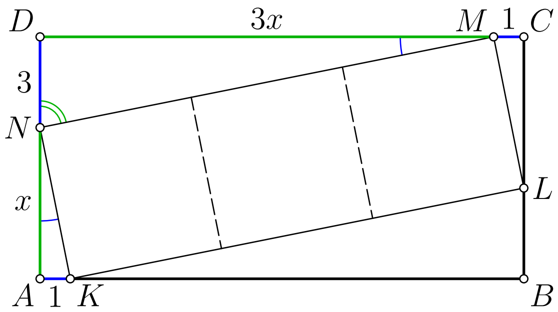
Plný počet 6 bodů udělte těm řešením, ze kterých je jasné, jak máme každý krok vykonat, abychom nakonec dostali čtveřici celých čísel. Neúplná řešení hodnoťte následovně:

A1. Tvrzení, že celá čísla jsou dosažitelná, bez snahy vysvětlit, jakým způsobem: 0 bodů.
A2. Rozklad čísel na prvočinitele a/nebo jejich částečné odmocnění: 0 bodů.
A3. Popis série kroků, po nichž získáme dvě stejná čísla: 1 bod.
A4. Popis série kroků, po nichž získáme jedno celé číslo a tři necelá čísla: 2 body.
A5. Popis série kroků, po nichž získáme dvě celá čísla a dvě necelá čísla: 4 body.
A6. Hypotéza, že čtyři celá čísla jsou dosažitelná, se slovním popisem kroků, ze kterého je jasný záměr, avšak v nějakém kroku tento popis nemá jednoznačnou interpretaci a některá z možných interpretací nevede k cíli: 5 bodů.
B1. Myšlenka, že jakmile získáme dvě *celá* čísla, snadno pak dojdeme k cíli: 2 body.
B2. Myšlenka, že jakmile získáme dvě *stejná* čísla, jejich součin bude celé číslo: 2 body.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\mathrm{B1} + \max(\mathrm{B2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4}), \mathrm{A5}, \mathrm{A6}\bigr)$ bodů. Částečné body udělte i v případě, že v řešení je konstatováno, že všechna čtyři celá čísla jsou (asi) nedosažitelná. Pokud ovšem řešitel konstatuje, že nedosažitelnost čtyř celých čísel svým postupem dokázal, udělte nejvýše 3 body. Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

3. *Je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA jsou dány po řadě body K, L, M, N tak, že $KLMN$ je obdélník, v němž $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Na jeho stranách KL, LM, MN, NK jsou opět dány po řadě body W, X, Y, Z tak, že $WXYZ$ je obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné se stranami obdélníku $ABCD$. Vypočtěte poměr $|XY| : |YZ|$.* (Pavel Calábek)

Řešení. Úloha těsně navazuje na úlohu z domácího kola se stejně zadanými obdélníky $ABCD$ a $KLMN$. V průběhu jejího řešení jsme odvodili poznatek, že čtyři pravoúhlé trojúhelníky ANK, DMN, CLM, BKL jsou navzájem podobné, přitom každý z nich má délky odvěsen v poměru $5 : 1$, konkrétně $|AN| : |AK| = 5 : 1$. Řešitelé krajského kola se mohou na tento výsledek odvolat, uveďme však i nyní jeho odvození podle následujícího obrázku. Postup se nám totiž bude hodit k obdobnému posouzení dvojice obdélníků $KLMN$ a $WXYZ$.

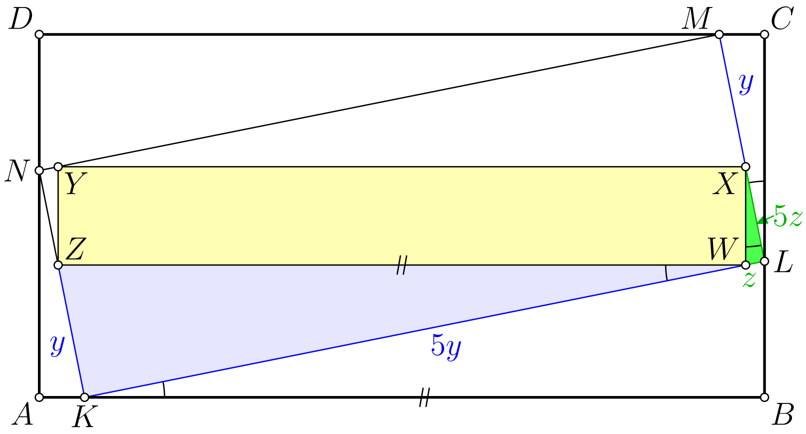


Avizovaná podobnost pravoúhlých trojúhelníků ANK, DMN, CLM a BKL, které „obklopují“ obdélník $KLMN$, plyne podle věty *uu* ze shodností jejich vnitřních úhlů. Například vyznačené úhly KNA a DNM se doplňují do $90°$, stejně jako úhly DNM a NMD, odkud dostáváme shodnost úhlů KNA a NMD. Analogicky se zdůvodní i ostatní potřebné shodnosti úhlů.

Dále jsme v řešení úlohy určili poměry podobností zmíněných čtyř trojúhelníků: trojúhelníky ANK a CLM jsou dokonce shodné (mají totiž shodné přepony), oproti nim mají trojúhelníky DMN a BKL strany třikrát delší (třikrát delší jsou totiž podle zadání jejich přepony). Při volbě jednotky délky $1 = |AK|$ a označení $x = |AN|$ tak máme $|CM| = 1$, $|DN| = 3$ a $|DM| = 3x$, a tedy $|AB| = |CD| = 3x+1$ a $|BC| = |AD| = x+3$. Dosazením do zadaného poměru $|AB| : |BC| = 2 : 1$ dostaneme rovnici $(3x+1) = 2(x+3)$ s jediným řešením $x = 5$. Proto skutečně platí například $|AN| : |AK| = 5 : 1$. Tímto uzavíráme připomenutí postupu z domácího kola.

Nyní výše provedené úvahy využijeme pro dvojici obdélníků $KLMN$ a $WXYZ$. Znovu zde tak máme čtveřici podobných pravoúhlých trojúhelníků KWZ, LXW, MYX a NZY „obklopujících“ obdélník $WXYZ$. Hledaný poměr $|XY| : |YZ|$, zapsaný jako poměr $|WZ| : |XW|$, je tak vlastně poměrem délek přepon dvou podobných trojúhelníků KWZ a LXW. Najdeme jej dále jako poměr $|KZ| : |LW|$ délek odpovídajících si odvěsen těchto dvou trojúhelníků.

Ze zadání plyne, že strana AB obdélníku $ABCD$ musí být rovnoběžná se stranou ZW obdélníku $WXYZ$, neboť je zřejmě vyloučeno, aby platilo $AB \parallel ZY$. Proto jsou střídavé úhly KWZ a BKL shodné, takže pravoúhlé trojúhelníky KWZ a BKL jsou



podobné podle věty *uu*. Na obrázku je tak dokonce osm navzájem podobných pravoúhlých trojúhelníků, každý s délkami odvěsen v dříve určeném poměru 5 : 1.

Při označení $y = |KZ|$ a $z = |LW|$ tak máme $|KW| = 5y$ a $|LX| = 5z$. To dává $|KL| = 5y + z$ a $|LM| = 5z + y$ (neboť $|MX| = |KZ|$ ze shodnosti trojúhelníků MYX a KWZ). Podmínku $|KL| : |LM| = 3 : 1$ tudíž můžeme přepsat jako rovnost $5y + z = 3(5z + y)$, ze které snadno plyne $y = 7z$. Podle našich úvah tak pro hledaný poměr vychází

$$|XY| : |YZ| = |WZ| : |XW| = |KZ| : |LW| = y : z = 7 : 1.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za takové je třeba považovat i řešení, kdy poznatky z A1 a A3 jsou označeny za známé (z domácího kola) a poznatek z A2 za analogii poznatku z A1 (existují však úplné postupy, které poznatek z A3 nevyužívají přímo, ale skrytě v nějaké rovnici). Neúplná řešení hodnoťte následovně, přitom body za A1, A2 a A3 udělte i v případě popsaném v předchozí větě:

A1. Důkaz podobnosti některých dvou sousedních z trojúhelníků ANK, BKL, CLM, DMN (obklopujících obdélník $KLMN$): 1 bod.

A2. Důkaz podobnosti některých dvou sousedních z trojúhelníků KWZ, LXW, MYX, NZY (obklopujících obdélník $WXYZ$): 1 bod.

A3. Podložený výpočet poměru délek některých dvou stran jednoho trojúhelníku z A1 (nejspíše odvěsen, kdy vyjde 5 : 1): 2 body.

A4. Důkaz podobnosti dvou trojúhelníků, z nichž jeden je uveden v A1 a druhý v A2: 1 bod.

B1. Podložené sestavení jedné nebo více lineárních rovnic, které umožňují spočítat poměr podobnosti mezi většími a menšími trojúhelníky z A2: 5 bodů.

Nestačí tedy vypsat například soustavu kvadratických rovnic, které lze získat bez užití podobnosti užitím Pythagorovy věty pro různé zastoupené pravoúhlé trojúhelníky.

Celkem pak udělte $\max\bigl(\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}) + \mathrm{A4}, \mathrm{B1}\bigr)$ bodů. Tolerujte, pokud řešitel zdůvodní podobnost nějaké dvojice trojúhelníků a poté podobnosti, které lze zdůvodnit stejným postupem, označí za analogické. Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.

4. *Určete počet uspořádaných čtveřic* (a, b, c, d) *čísel z množiny* $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$*, která zároveň splňují rovnosti*

$$ab = cd, \qquad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

(Například uspořádaná čtveřice $(1, 2, 3, 1)$ *je jiná než uspořádaná čtveřice* $(2, 3, 1, 1)$*.)*

(Ján Mazák)

Řešení. Všimněme si, že díky rovnostem ze zadání platí

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = (c^2 + d^2) + 2cd = (c + d)^2.$$

Protože obě čísla $a + b$, $c + d$ jsou kladná, po odmocnění dostáváme $a + b = c + d$.

Při podobné úvaze pro rozdíly $a - b$ a $c - d$ musíme být o něco opatrnější. Z rovností

$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = (c^2 + d^2) - 2cd = (c - d)^2$$

po odmocnění tentokrát dostáváme $|a - b| = |c - d|$, takže nastane aspoň jeden z případů (i) $a - b = c - d$ nebo (ii) $a - b = d - c$.

V obou případech můžeme získanou rovnost sečíst s rovností $a + b = c + d$, čímž dostaneme v případě (i) rovnost $2a = 2c$, tj. $a = c$, zatímco v případě (ii) vyjde $2a = 2d$, tj. $a = d$. Z rovnosti $a+b = c+d$ pak v případě (i) díky $a = c$ platí $b = d$, zatímco v případě (ii) díky $a = d$ platí $b = c$. Každopádně se tak dvojice a, b v některém pořadí rovná dvojici c, d, a proto každá vyhovující čtveřice musí být tvaru (a, b, a, b) nebo (a, b, b, a).

Na druhou stranu všechny čtveřice (a, b, a, b) i (a, b, b, a) zřejmě splňují obě rovnosti ze zadání. Zbývá proto určit počet těchto čtveřic. Pokud platí $a = b$, jde o čtveřice téhož tvaru (a, a, a, a) a těch je 1 000. Pokud naopak $a \neq b$, jsou čtveřice (a, b, a, b) a (a, b, b, a) různé. Protože máme 1 000 možností pro výběr a a poté 999 možností pro výběr b, počet čtveřic, ve kterých $a \neq b$, je roven $2 \cdot 1\,000 \cdot 999 = 1\,998\,000$. Celkem tak existuje právě 1 999 000 vyhovujících čtveřic.

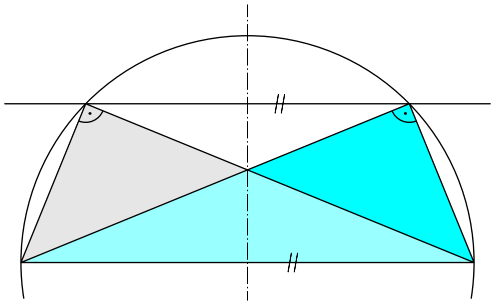
Jiné řešení. Z první zadané rovnosti vyjádříme $d = ab/c$, což dosadíme do druhé rovnosti, kterou dále upravíme následovně:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 + (ab/c)^2 \quad | \cdot c^2, \\ c^2(a^2 + b^2) &= c^4 + a^2b^2, \\ c^2a^2 + c^2b^2 &= c^4 + a^2b^2, \\ c^2a^2 - c^4 &= a^2b^2 - c^2b^2, \\ c^2\bigl(a^2 - c^2\bigr) &= b^2\bigl(a^2 - c^2\bigr), \\ \bigl(a^2 - c^2\bigr)\bigl(c^2 - b^2\bigr) &= 0. \end{aligned}$$

Protože čísla a, b, c, d jsou kladná, podle odvozené rovnosti se číslo c rovná některému z čísel a nebo b. Tomu druhému se díky $d = ab/c$ pak rovná číslo d.

Znovu jsme došli k závěru, že každá vyhovující čtveřice musí být tvaru (a, b, a, b) nebo (a, b, b, a), přičemž jakákoli taková čtveřice zadání zřejmě vyhovuje. Čtveřic tvaru (a, b, a, b) je 1000^2 (připouštíme i možnost $a = b$). Stejně tak čtveřic tvaru (a, b, b, a) je 1000^2 (připouštíme i možnost $a = b$). Protože však v součtu $1000^2 + 1000^2$ je každá z 1000 čtveřic (a, a, a, a) (možnost $a = b$) započítána dvakrát, vyhovujících čtveřic je právě $2 \cdot 1000^2 - 1000 = 1\,999\,000$.

Poznámka. Zdůvodnění, proč každá vyhovující čtveřice (a, b, c, d) musí být tvaru (a, b, a, b) nebo (a, b, b, a), lze podat také geometricky. K tomu uvážíme dva pravoúhlé trojúhelníky, jeden s odvěsnami délek a a b, druhý s odvěsnami délek c a d. Podle první zadané rovnosti mají tyto dva trojúhelníky stejné obsahy, podle druhé rovnosti mají shodné přepony. Mají tak i shodné výšky k přeponě. Využijme nyní známou konstrukci pravoúhlého trojúhelníku podle zadané přepony a zadané výšky. Díky souměrnosti užité Thaletovy kružnice podle osy přepony jsou naše dva trojúhelníky shodné. Proto platí $(a, b) = (c, d)$ nebo $(a, b) = (d, c)$, jak jsme chtěli ukázat.



Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za takové považujte i řešení, ve kterých po odvození jediných možných tvarů (a, b, a, b) a (a, b, b, a) chybí zmínka o tom, že všechny takové čtveřice rovnosti ze zadání zřejmě splňují. Neúplná řešení hodnoťte následovně:

A0. Vyjádření jednoho z čísel a, b, c, d z jedné rovnosti a dosazení do druhé rovnosti: 0 bodů.

A1. Udělte 2 body, pokud řešitel splní cokoli z následujícího:
- ▷ Odvození některé z rovností $(a+b)^2 = (c+d)^2$, $a+b = c+d$ nebo $(a-b)^2 = (c-d)^2$.
- ▷ Pozorování, že pokud pevně zvolíme hodnotu součinu ab, hodnota $a^2 + b^2$ klesá s tím, čím blíže jsou čísla a a b k sobě.
- ▷ Označení $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$, $D = d^2$ a převedení původních rovností na rovnosti $AB = CD$ a $A + B = C + D$.

A2. Odvození obou rovností $(a+b)^2 = (c+d)^2$ a $(a-b)^2 = (c-d)^2$: 3 body.

A3. Vyjádření jedné neznámé z rovnice $ab = cd$ a dosazení do druhé rovnice s vyjádřeným záměrem řešit kvadratickou rovnici pro druhou mocninu vhodné neznámé (v našem druhém řešení jde o kvadratickou rovnici pro c^2 s kořeny a^2, b^2): 3 body.

A4. Zdůvodnění, proč některé z čísel a, b je rovno některému z čísel c, d, případně odvození rovnosti, ze které to ihned plyne, například rovnosti $(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = 0$: 4 body.
Tolerujte přitom, když řešitel odvodí (typicky špatným odmocněním rovnosti $(a - b)^2 = (c - d)^2$) pouze jeden ze dvou možných případů. Tento krok lze také splnit vyřešením kvadratické rovnice z A3.

A5. Důkaz, že vyhovující čtveřice musí být tvaru (a, b, a, b) nebo (a, b, b, a) (nezáleží, zda je závěr zformulován pomocí čtveřic nebo je zapsána či slovně popsána rovnost $\{a, b\} = \{c, d\}$): 5 bodů.
Tento důkaz může být proveden postupy z obou řešení i geometrickým postupem z poznámky.

B1. Pozorování, že rovnostem ze zadání vyhovují nejen čtveřice tvaru (a, b, a, b), ale i čtveřice tvaru (a, b, b, a): 1 bod.

B2. Správné vyčíslení počtu čtveřic tvarů (a, b, a, b) a (a, b, b, a) dohromady: 1 bod.

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1}, \mathrm{A2}, \mathrm{A3}, \mathrm{A4}, \mathrm{A5}, \mathrm{B1}) + \mathrm{B2}$ bodů. Postupuje-li řešitel námi neuvedeným způsobem, hodnoťte jeho dílčí kroky obdobně.