II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Děti dostaly příklad s pěti prázdnými políčky:

$$\square \cdot \square - \square : (\square + \square) = ?$$

Do každého políčka měly vepsat jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby každé číslo použily pouze jednou a aby dělení vycházelo beze zbytku.

Najděte všechny výsledky, které mohly děti dostat. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Dělencem mohou být jedině daná čísla, tedy čísla od 1 do 5. Dělitelem mohou být jedině součty daných čísel, tedy čísla od 3 do 9. Dělení beze zbytku lze uvedeným způsobem sestavit jedině takto:

$$3 : (1 + 2), \quad 4 : (1 + 3), \quad 5 : (1 + 4), \quad 5 : (2 + 3).$$

Pořadí sčítanců v závorkách není podstatné, ve všech případech je podíl roven 1.

Doplnění zbylých dvou čísel do zbylých dvou políček dává následující příklady:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5 - 3 : (1 + 2) &= 19, \\ 2 \cdot 5 - 4 : (1 + 3) &= 9, \\ 2 \cdot 3 - 5 : (1 + 4) &= 5, \\ 1 \cdot 4 - 5 : (2 + 3) &= 3. \end{aligned}$$

Pořadí součinitelů není podstatné. Děti mohly dostat výsledky 19, 9, 5, nebo 3.

Hodnocení. Po 1 bodu za každé správné doplnění s výsledkem; 2 body za úplnost komentáře.

Z5–II–2

Albert, Ben, Cyril, Dan, Erik, Filip a Gábo vstoupili v tomto pořadí po jednom za sebou do jeskyně s mnoha dveřmi. Svoje pořadí mění jen při průchodu dveřmi, a to takto: první ze zástupu otevře dveře, podrží je všem ostatním a pak se zařadí na konec. První dveře tedy otevírá Albert, druhé Ben atd.

Kdo otevře sté dveře? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Pořadí jeskyňářů se postupně mění takto:

vstup: A, B, C, D, E, F, G
1. dveře: B, C, D, E, F, G, A
2. dveře: C, D, E, F, G, A, B

⋮

7. dveře: A, B, C, D, E, F, G
8. dveře: B, C, D, E, F, G, A
9. dveře: C, D, E, F, G, A, B

⋮

14. dveře: A, B, C, D, E, F, G
15. dveře: B, C, D, E, F, G, A
16. dveře: C, D, E, F, G, A, B

⋮

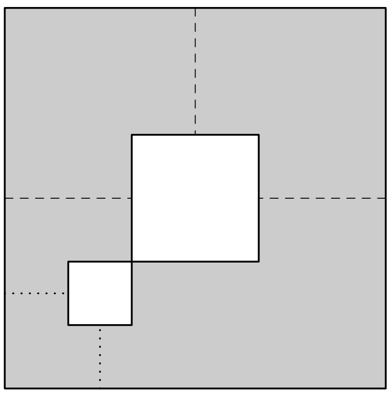
V každých sedmých dveřích je jejich pořadí stejné.

Nejbližší násobek sedmi menší než 100 je 98 ($7 \cdot 14 = 98$). Tedy 98. dveřmi (stejně jako 7., 14. atd.) prochází jeskyňáři v původním pořadí. Další, 99. dveře (stejně jako 1., 8., 15. atd.) otevírá Adam. Další, sté dveře (stejně jako 2., 9., 16. atd.) otevírá Ben.

Hodnocení. 2 body za pozorování, že pořadí jeskyňářů se opakuje s periodou odpovídající jejich počtu; 2 body za odhalení původního pořadí v 98. dveřích; 2 body za dořešení úlohy.

Z5–II–3

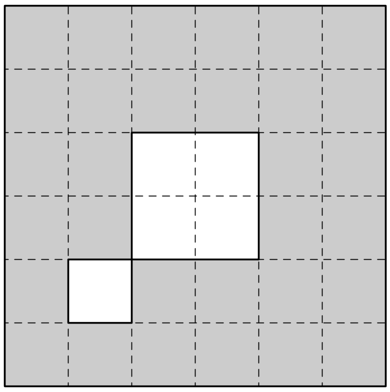
Na obraze jsou dva bílé čtverce v šedém poli. Strany obrazu i strany obou čtverců jsou orientovány vodorovně, nebo svisle:



Tečkovaně vyznačené vzdálenosti menšího čtverce od stran obrazu jsou stejné jako velikost strany tohoto čtverce. Čárkovaně vyznačené vzdálenosti většího čtverce od stran obrazu jsou stejné jako velikost strany tohoto čtverce. Obsah šedé části obrazu je $62\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah bílé části obrazu. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Velikost (levé vodorovné) čárkované úsečky je stejná jako součet velikostí tečkované úsečky a strany menšího čtverce. Tedy velikost čárkované úsečky je dvojnásobná vzhledem k velikosti tečkované úsečky neboli strana většího čtverce je dvojnásobná vzhledem ke straně menšího čtverce. Celý útvar tak lze rozdělit na pole shodná s menším bílým čtvercem:



Větší bílý čtverec je tvořen 4 poli. Bílých polí je celkem 5 ($1 + 4 = 5$). Všech polí je 36 ($6 \cdot 6 = 36$). Šedých polí je 31 ($36 - 5 = 31$).

Šedá část má obsah $62\,\mathrm{cm}^2$, tedy obsah jednoho pole je $2\,\mathrm{cm}^2$ ($62 : 31 = 2$). Bílých polí je 5, tedy bílá část obrazu má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$ ($5 \cdot 2 = 10$).

Hodnocení. 1 bod za poznatek o poměru stran bílých čtverců; 1 bod za rozdělení útvaru a počty bílých a šedých polí; 2 body za obsah jednoho pole; 2 body za obsah bílé části obrazu.

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Žáci dostali přirozené číslo menší než 100. Aleš dané číslo zaokrouhlil na desítky. Bára dané číslo zaokrouhlila na stovky. Cyril dané číslo vynásobil dvěma. Dana zaokrouhlené Alešovo a Bářino číslo sečetla. Eva od Danina čísla odečetla Cyrilovo číslo. František oznámil Evin výsledek, a ten byl 30.

Které číslo mohli žáci dostat? Určete všechny možnosti. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Danino číslo (součet Alešova a Bářina čísla) bylo o 30 větší než Cyrilovo (dvojnásobek daného čísla).

Pokud by dané číslo bylo menší než 50, pak by Bářino číslo bylo nula (zaokrouhlení na stovky). V takovém případě by Danino číslo bylo stejné jako Alešovo, a to nemůže být větší než Cyrilovo číslo. Tedy dané číslo bylo alespoň 50.

Zaokrouhlené Alešovo a Bářino číslo, a proto i Danino číslo, bylo násobkem desíti. Také rozdíl Danina a Cyrilova čísla byl násobkem desíti. Tedy dané číslo bylo násobkem pěti.

Pro čísla od 50 do 99, která jsou násobky pěti, probereme všechny možnosti:

dáno	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
Aleš	50	60	60	70	70	80	80	90	90	100
Bára	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Cyril	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Dana	150	160	160	170	170	180	180	190	190	200
Eva	50	50	40	40	**30**	**30**	20	20	10	10

Žáci mohli dostat buď číslo 70, nebo 75.

Hodnocení. 2 body za dílčí pozorování týkající se daného čísla; po 1 bodu za každou správnou možnost; 2 body za úplnost komentáře.

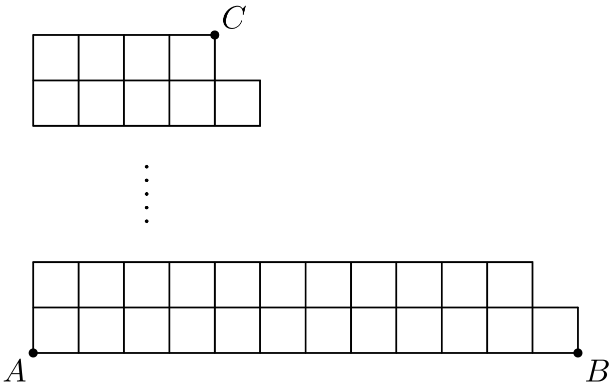
Z6–II–2

Ze shodných čtverců se stranou délky 1 cm je složen útvar s následujícími vlastnostmi:

- Útvar je tvořen řadami sousedících čtverců.
- Spodní řada sestává ze dvanácti čtverců.
- Každá vyšší řada začíná zleva stejně jako řada pod ní, má však o jeden čtverec méně.
- Horní řadu tvoří čtyři čtverce.

Vrcholy spodní strany útvaru jsou označeny A a B, pravý vrchol horní strany je označen C.

Určete obsah trojúhelníku ABC. (*E. Novotná, K. Pazourek*)



Možné řešení. Nejprve určíme počet řad útvaru. Těch je tolik, kolik je celých čísel od 4 do 12, a to je 9.

Obsah trojúhelníku ABC je poloviční vzhledem k obdélníku tvořenému 9 řadami po 12 čtvercích. Obsah trojúhelníku ABC je

$$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 3 body za počet řad útvaru; 3 body za obsah trojúhelníku.

Z6–II–3

V zemi Binárii žijí matematici několika úrovní. Všichni matematici stejné úrovně vyřeší za den stejný počet příkladů. Matematik vyšší úrovně vyřeší za den dvojnásobné množství příkladů než matematik předchozí úrovně. Tři matematici páté úrovně vyřeší za den o tisíc příkladů víc než čtyři matematici druhé úrovně.

Kolik příkladů vyřeší za den jeden matematik druhé úrovně?

(*K. Pazourek, M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve porovnáme výkonnosti matematiků různých úrovní:

- Matematik 3. úrovně vyřeší za den dvojnásobek toho, co matematik 2. úrovně.
- Matematik 4. úrovně vyřeší za den dvojnásobek toho, co matematik 3. úrovně, tj. čtyřnásobek toho, co matematik 2. úrovně.
- Matematik 5. úrovně vyřeší za den dvojnásobek toho, co matematik 4. úrovně, tj. čtyřnásobek toho, co matematik 3. úrovně, tj. osminásobek toho, co matematik 2. úrovně.

Tři matematici 5. úrovně vyřeší za den tolik, co 24 matematiků 2. úrovně ($3 \cdot 8 = 24$). To je podle zadání o 1000 příkladů víc, než vyřeší čtyři matematici 2. úrovně. Tedy 20 matematiků 2. úrovně vyřeší za den 1000 příkladů ($24 - 4 = 20$).

Jeden matematik 2. úrovně vyřeší za den 50 příkladů ($1000 : 20 = 50$).

Hodnocení. 2 body za porovnání matematiků různých úrovní; 2 body za pomocné výpočty; 2 body za výsledek.

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Děti házely klasickou hrací kostkou s čísly od 1 do 6. Když padlo sudé číslo, tak zatleskaly. Když padlo číslo dělitelné třemi, tak zadupaly. Když nastaly oba případy, udělaly obojí, v ostatních případech nedělaly nic. Během pěti hodů děti celkem třikrát zatleskaly a třikrát zadupaly. Součet čísel, která postupně padla, byl dvacet.

Najděte všechny možné pětice čísel, která mohla padnout, bez ohledu na jejich pořadí.
(*E. Semerádová*)

Možné řešení. Děti zatleskaly, když padlo číslo 2, 4, nebo 6. Děti zadupaly, když padlo číslo 3, nebo 6.

Protože děti dupaly celkem třikrát, mohly padnout jedině následující pětice:

$$6, 6, 6, *, *; \quad 6, 6, 3, *, *; \quad 6, 3, 3, *, *; \quad 3, 3, 3, *, *,$$

kde $*$ značí čísla různá od 3 a 6.

Protože děti tleskaly celkem třikrát, byly v pětici právě tři sudá čísla. Poslední z výše uvedených pětic takto doplnit nelze, zbylé tři doplnit lze. Aby součet čísel byl roven 20, je doplnění každé pětice určeno jednoznačně:

$$6, 6, 6, 1, 1; \quad 6, 6, 3, 4, 1; \quad 6, 3, 3, 4, 4.$$

To jsou všechny možné pětice čísel, které mohly dětem padnout.

Hodnocení. Po 1 bodu za každou správnou pětici; 3 body za úplnost komentáře.

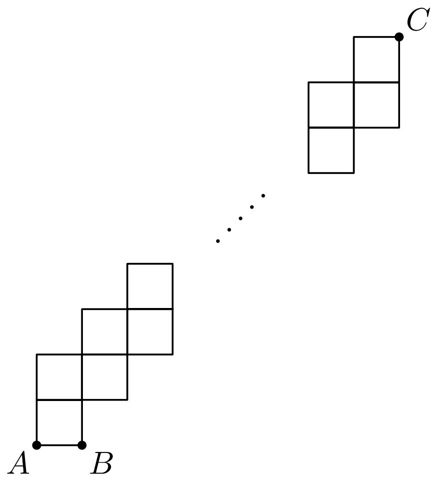
Z7–II–2

Ze shodných čtverců se stranou délky 1 cm je složen útvar s následujícími vlastnostmi:

- Spodní a horní řada sestává z jednoho čtverce.
- Ostatní řady mají po dvou sousedících čtvercích.
- Všechny sloupce jsou tvořeny dvěma sousedícími čtverci.
- Obvod útvaru je 178 cm.

Vrcholy spodní strany útvaru jsou označeny A a B, pravý vrchol horní strany je označen C.

Určete obsah trojúhelníku ABC. (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Potřebujeme určit počet řad útvaru, tj. výšku trojúhelníku ABC vzhledem ke straně AB. Tento údaj je ukryt v informaci o obvodu útvaru.

Spodní a horní řada (o jednom čtverci) přispívá do obvodu útvaru 3 cm, ostatní řady (o dvou čtvercích) přispívají 4 cm. Obvod útvaru bez příspěvku spodního a horního čtverce je 172 cm ($178 - 2 \cdot 3 = 172$). Tedy počet řad o dvou čtvercích je 43 ($172 : 4 = 43$) a řad celkem je 45 ($2 + 43 = 45$).

Obsah trojúhelníku ABC je

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 45 = 22{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za dílčí postřehy související s obvodem útvaru; 2 body za počet řad útvaru; 2 body za obsah trojúhelníku.

Z7–II–3

Na závodech se spolu utkalo pět dětí, děvčata Anna a Fiona a chlapci Julek, Lukáš a Tomáš. O cílovém pořadí máme tyto informace:

- Žádné dvě děti se neumístily na stejném místě.
- Průměrné umístění děvčat bylo stejné jako průměrné umístění chlapců.
- Obě děvčata se umístila před Tomášem.
- Julek se umístil mezi Annou a Lukášem.

Určete cílové pořadí dětí. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Z první a druhé informace plyne, že děvčata byla na druhém a čtvrtém místě a chlapci byli na prvním, třetím a pátém místě.

Odtud a ze třetí informace plyne, že Tomáš byl poslední.

Odtud a ze čtvrté informace plyne, že Lukáš byl první a Anna čtvrtá (aby vůbec byl nějaký prostor mezi nimi). Tedy Julek byl třetí a Fiona druhá.

Cílové pořadí dětí bylo

1. Lukáš, 2. Fiona, 3. Julek, 4. Anna, 5. Tomáš.

Hodnocení. 2 body za zjištění, že chlapci a děvčata se v pořadí střídají; 2 body za cílové pořadí dětí; 2 body za kvalitu komentáře.

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Počítačový program vypisoval po řádcích čísla tvořená číslicemi od 1 do 9. Číslice byly použity opakovaně v přirozeném pořadí. Na každém řádku bylo o jednu číslici víc než na řádku předchozím, na prvním řádku byla 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 123 \\ \vdots \\ 123456789 \\ 1234567891 \\ 12345678912 \\ \vdots \end{array}$$

Výpis byl ukončen číslem na 2024. řádku.

Zjistěte, na kolika řádcích byla čísla dělitelná a) třemi, b) čtyřmi. (*P. Bak*)

Možné řešení. V obou případech nejprve zjistíme, jak se příslušná vlastnost mezi postupně tvořenými čísly opakuje:

a) Číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Do ciferných součtů přispívají opakovaně čísla od 1 do 9, a ty mají po dělení třemi zbytky opakovaně 1, 2, 0. U tvořených čísel se tak zbytek po dělení ciferného součtu třemi opakuje po trojicích takto:

$$1, 0, 0; 1, 0, 0; \ldots$$

V každé takové trojici jsou dvě čísla dělitelná třemi.

Nejbližší násobek tří menší než 2024 je 2022 ($= 3 \cdot 674$). Tedy na prvních 2022 řádcích je 1348 čísel dělitelných třemi (674 trojic po dvou číslech dělitelných třemi). Číslo na 2023. řádku dělitelné třemi není, číslo na 2024. řádku dělitelné třemi je.

Čísla dělitelná třemi jsou na 1349 řádcích.

b) Číslo je dělitelné čtyřmi, právě když je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. U tvořených čísel se poslední dvojčíslí opakují takto:

$$\_1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89; 91, 12, 23, \ldots$$

Až na úplně první číslo, které je jednomístné, se poslední dvojčíslí tvořených čísel opakují po devíticích. V každé takové devítici jsou dvě čísla dělitelná čtyřmi, a to 12 a 56.

Nejbližší násobek devíti menší než 2024 je 2016 ($= 9 \cdot 224$). Tedy na prvních 2016 řádcích je 448 čísel dělitelných čtyřmi (224 devític po dvou číslech dělitelných čtyřmi). Na zbylých osmi řádcích jsou koncová dvojčíslí 91, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, mezi nimiž jsou dvě dělitelná čtyřmi.

Čísla dělitelná čtyřmi jsou na 450 řádcích.

Poznámka. Také v případě b) lze sledovat posloupnost zbytků po dělení čtyřmi. Ty se u tvořených čísel opakují po devíticích takto:

$$1, 0, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1; 1, 0, 3, \ldots$$

V každé takové devítici jsou dvě čísla dělitelná čtyřmi. Další postup je stejný jako výše.

Hodnocení. V každém z obou případů udělte 1 bod za odhalení opakujícího se vzoru; 1 bod za výsledek; 1 bod za kvalitu komentáře.

Z8–II–2

Mezi hračkami v obchodě jsou pouze lodě a auta. Lodě tvoří čtvrtinu hraček. 75 % lodí a 40 % aut je červených. Červených hraček je o 10 méně než těch s jinou barvou.

Kolik hraček je v obchodě? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Poměrné zastoupení červených lodí mezi všemi hračkami je

$$\frac{75}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Poměrné zastoupení červených aut mezi všemi hračkami je

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}.$$

Poměrné zastoupení červených hraček mezi všemi je

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{10} = \frac{15 + 24}{80} = \frac{39}{80}.$$

Zejména počet všech hraček je dělitelný 80.

Pokud by všech hraček bylo 80, bylo by červených 39 a ostatních 41. V takovém případě by červených hraček bylo o 2 méně než těch s jinou barvou. Červených je však o 10 méně než ostatních a $10 = 5 \cdot 2$. Tedy všech hraček je $5 \cdot 80 = 400$.

V obchodě je 400 hraček.

Poznámka. Úvahu v závěrečné části řešení lze nahradit rovnicí

$$\frac{39}{80}h = \frac{41}{80}h - 10,$$

kde h značí počet hraček. Úpravami dostáváme $\frac{2}{80}h = 10$, a tedy $h = 400$.

Hodnocení. 3 body za poměrné zastoupení červených hraček mezi všemi hračkami; 3 body za počet hraček.

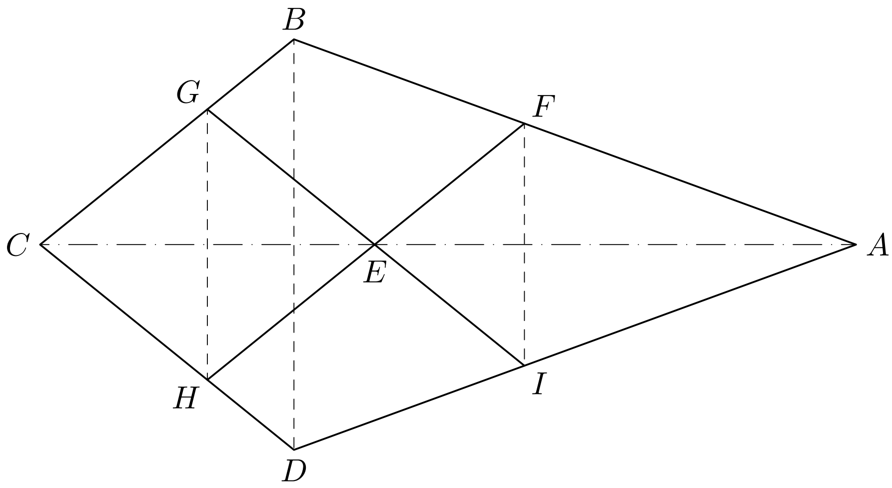
Z8–II–3

Deltoid je konvexní čtyřúhelník, který má dvě dvojice shodných sousedních stran.

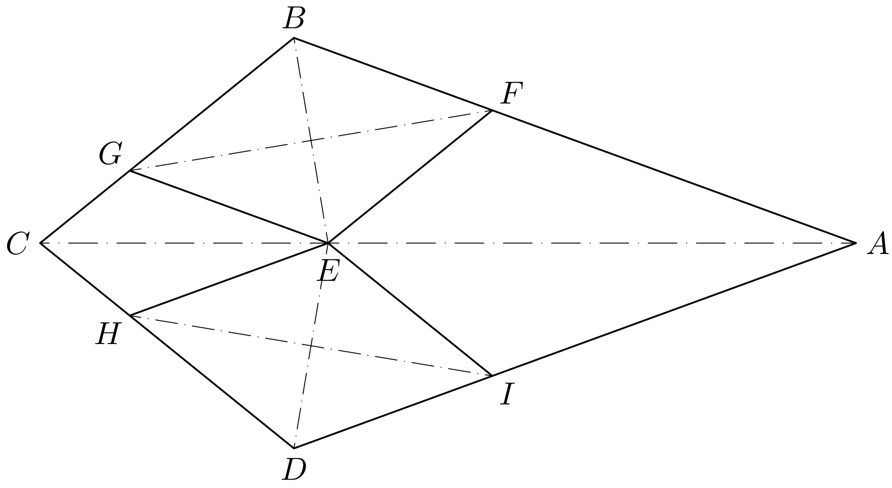
Sestrojte deltoid $ABCD$ se stranami AB a AD délky 11 cm, se stranami CB a CD délky 6 cm a s úhlopříčkou AC délky 15 cm. Rozdělte deltoid $ABCD$ na čtyři čtyřúhelníky tak, aby dva z nich byly deltoidy a dva byly shodné kosočtverce. Konstrukci popište a zdůvodněte. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Při rozboru úlohy využijeme toho, že deltoid je osově souměrný podle jedné své úhlopříčky, a tedy má navzájem kolmé úhlopříčky. Kosočtverec lze chápat jako speciální deltoid, který má všechny strany navzájem shodné a je souměrný podle obou úhlopříček.

Deltoid $ABCD$ ze zadání je osově souměrný podle úhlopříčky AC. Dělení deltoidu popíšeme pomocí bodů E, F, G, H, I takových, že E leží na úhlopříčce AC, body F, G leží na stranách AB, BC a body H, I jsou osově souměrné vzhledem ke G, F podle přímky AC. Nezávisle na poloze bodu E na úhlopříčce AC jsou čtyřúhelníky $AFEI$ a $EGCH$ deltoidy (příp. kosočtverce) a čtyřúhelníky $EFBG$ a $EHDI$ jsou shodné.

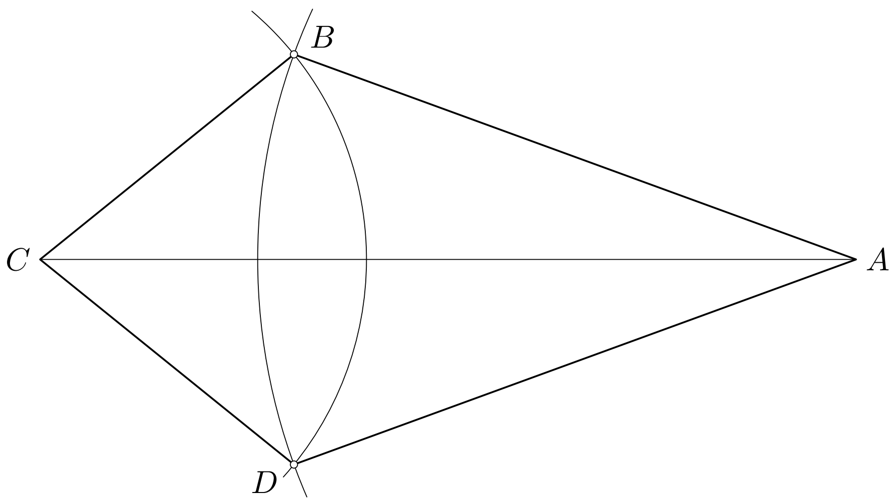


V kosočtverci jsou každé dva protější vnitřní úhly shodné. Protože úhly BCD a BAD shodné nejsou, čtyřúhelníky $AFEI$ a $EGCH$ nemohou být shodné kosočtverce. Uvažujeme tedy o takovém dělení, aby shodnými kosočtverci byly čtyřúhelníky $EFBG$ a $EHDI$. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky v kosočtverci jsou jeho osami souměrnosti, je takové dělení určeno jednoznačně — v kosočtverci $EFBG$ je úhlopříčka BE osou úhlu ABC a úhlopříčka GF je osou úsečky BE, v kosočtverci $EHDI$ je tomu obdobně.



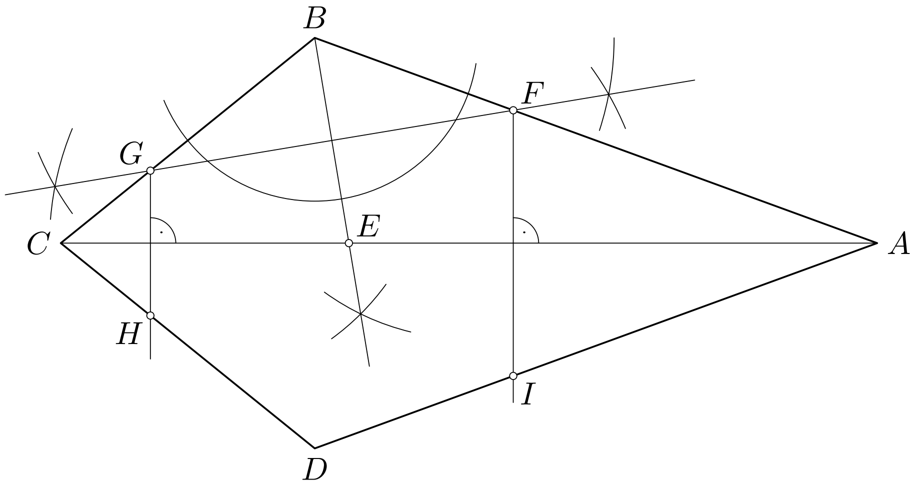
Konstrukce deltoidu:

1) úsečka AC délky 15 cm,
2) kružnice se středem A a poloměrem 11 cm,
3) kružnice se středem C a poloměrem 6 cm,
4) body B, D jsou průsečíky kružnic 2) a 3).



Konstrukce dělení:

5) osa úhlu ABC,
6) bod E je průsečíkem přímky 5) s úsečkou AC,
7) osa úsečky BE,
8) body F, G jsou po řadě průsečíky přímky 7) se stranami AB, BC,
9) kolmice k přímce AC jdoucí body F, G,
10) body H, I jsou po řadě průsečíky kolmic 9) se stranami CD, DA,
11) čtyřúhelníky $AFEI$, $EGCH$, $EFBG$, $EHDI$.



Poznámka. Uvedená konstrukce je odvozena z předchozího rozboru úlohy. V útvaru jsou další vztahy, které lze také při konstrukci použít. Např. platí, že body F, G, H, I leží na kružnici se středem v bodě E.

Hodnocení. 3 body za rozbor úlohy a určení podstatných vztahů; 1 bod za konstrukci deltoidu $ABCD$; 2 body za konstrukci dělení. Pro zisk plného počtu bodů není třeba vysvětlovat, zda existuje jiné řešení.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Na prohlídce obrazárny se sešla skupina chlapců a děvčat. Během prohlídky nikdo nerušil a neodcházel. Po prohlídce odešlo 15 děvčat a v obrazárně tak zůstalo dvakrát více chlapců než děvčat. Následně odešlo 45 chlapců a v obrazárně zbylo pětkrát více děvčat než chlapců.

Kolik děvčat bylo v obrazárně během prohlídky? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme d a ch počty děvčat a chlapců během prohlídky. Vztahy ze zadání lze zapsat jako

$$ch = 2(d - 15), \quad d - 15 = 5(ch - 45), \tag{$*$}$$

Počet děvčat po prohlídce vyjádřený z prvního vztahu je $d - 15 = \frac{1}{2}ch$. Společně s druhým vztahem dostáváme rovnici s neznámou ch,

$$\frac{1}{2}ch = 5(ch - 45),$$

kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} ch &= 10ch - 450, \\ 9ch &= 450, \\ ch &= 50. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\frac{1}{2}ch = 5(ch - 45) = 25$, což odpovídá $d - 15$. Tedy $d = 25 + 15 = 40$. Během prohlídky bylo v obrazárně 40 děvčat.

Poznámky. Soustavu rovnic $(*)$ je možné řešit různými způsoby. Např. dosazení první rovnice do druhé dává rovnici s neznámou d, kterou dořešíme následovně:

$$\begin{aligned} d - 15 &= 5(2(d - 15) - 45), \\ d - 15 &= 10d - 375, \\ 9d &= 360, \\ d &= 40. \end{aligned}$$

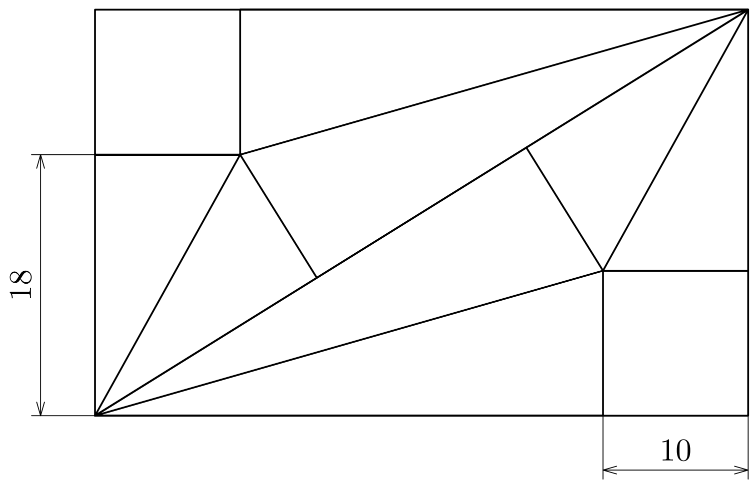
Počet děvčat poté, co jich část odešla, byl dělitelný pěti. Protože jich odešlo 15, byl i počet děvčat během prohlídky dělitelný pěti. Je tedy možné postupně za d dosazovat násobky pěti větší než 15, z první rovnice v $(*)$ vypočíst ch a ověřit, zda platí rovnice druhá. Jedinou vyhovující možností je $d = 40$.

Hodnocení. 2 body za formulaci vztahů $(*)$; 2 body za dořešení soustavy rovnic; 2 body za kvalitu komentáře. Při zkoušení možností berte v potaz úplnost komentáře, náhodně odhalené nezdůvodněné řešení hodnoťte 2 body.

Z9–II–2

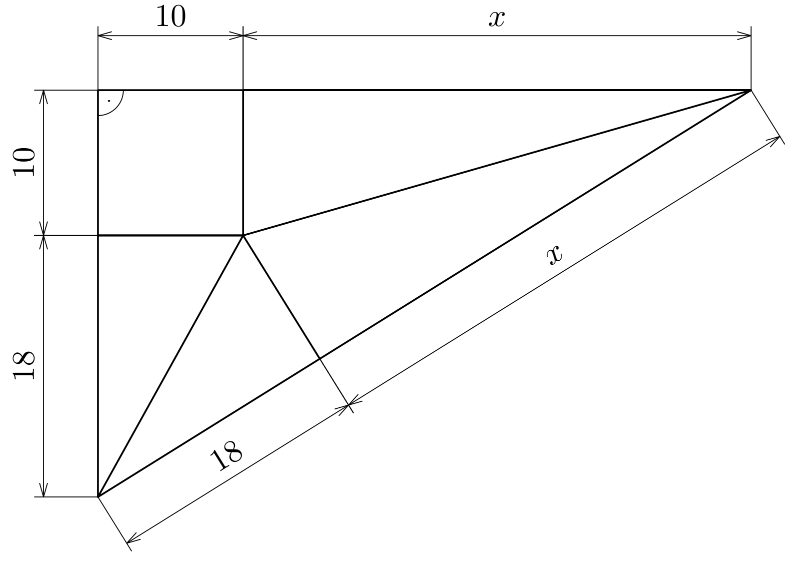
Obdélník na obrázku je rozdělen na dva shodné čtverce, čtyři shodné menší pravoúhlé trojúhelníky a čtyři shodné větší pravoúhlé trojúhelníky. Velikosti některých stran v cm jsou vyznačeny na obrázku.

Vypočtěte rozměry obdélníku. (*M. Dományová*)



Možné řešení. V rozích obdélníku jsou shodné čtverce se stranou délky 10 cm. Tedy svislá strana obdélníku měří $18 + 10 = 28$ (cm).

Na stranách obdélníku je jenom jedna neznámá úsečka (ovšem dvakrát), a tu označíme x. Ze shodností dílčích trojúhelníků umíme určit také části úhlopříčky obdélníku. Tato úhlopříčka dělí obdélník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, jehož strany jsou popsány takto:



Podle Pythagorovy věty platí

$$(18 + x)^2 = 28^2 + (10 + x)^2. \qquad (*)$$

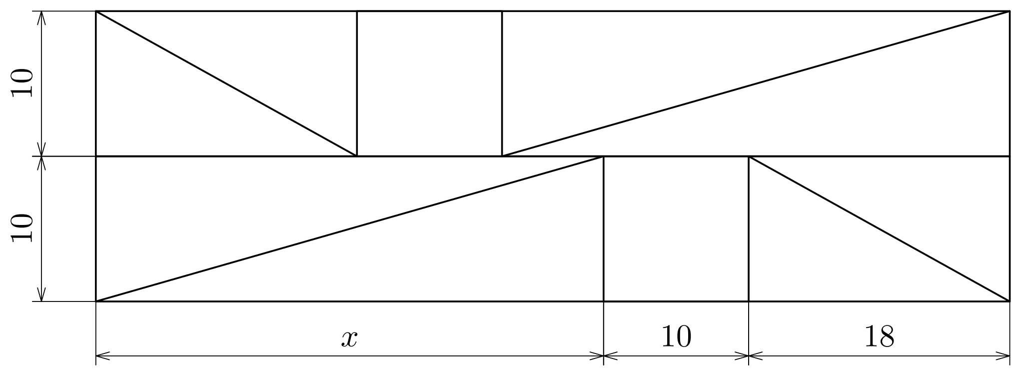
Po umocnění a úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 18^2 + 36x + x^2 &= 28^2 + 100 + 20x + x^2, \\ 16x &= 28^2 + 100 - 18^2 = \\ &= 784 + 100 - 324 = 560. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Tedy $x = 560/16 = 35$ a vodorovná strana obdélníku měří $35 + 10 = 45$ (cm).

Rozměry obdélníku jsou 28 cm a 45 cm.

Jiné řešení. Dále používáme stejné značení jako v předchozím řešení. Obsah daného obdélníku v cm^2 je roven $28(10+x)$. Obdélník sestává z deseti menších částí, které všechny mají aspoň jeden pravý úhel a aspoň jednu stranu délky 10 cm. Z těchto částí lze složit obdélník jako na obrázku:



Obsah tohoto obdélníku v cm^2 je roven $20(28 + x)$. Přeskládáním se však obsah nezměnil. Tak dostáváme rovnici,

$$28(10 + x) = 20(28 + x), \tag{$***$}$$

kterou dořešíme:

$$\begin{aligned} 280 + 28x &= 560 + 20x, \\ 8x &= 280, \\ x &= 35. \end{aligned}$$

Vodorovná strana obdélníku měří $35+10 = 45$ (cm); rozměry obdélníku jsou 28 cm a 45 cm.

Hodnocení. 1 bod za svislou stranu obdélníku; 1 bod za vyjádření dalších částí pomocí neznámé a formulaci $(*)$ či $(***)$; 2 body za dořešení a výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámky. Všechna čísla v $(**)$ jsou dělitelná čtyřmi, což pro druhé mocniny vidíme bez umocnění takto: $28^2 = (2 \cdot 14)^2 = 4 \cdot 14^2$, $18^2 = (2 \cdot 9)^2 = 4 \cdot 9^2$. Rovnice $(**)$ je tedy ekvivalentní s $4x = 14^2 + 25 - 9^2$. Při ručním počítání je toto vyjádření výhodnější.

Místo obdélníku ve druhém řešení úlohy se lze omezit na jeho polovinu, tzn. trojúhelník jako výše. V tomto duchu by všechny diskutované obsahy byly poloviční, zejména místo rovnice ($***$) bychom odvodili ekvivalentní rovnici $14(10+x) = 10(28+x)$. Pravou stranu této rovnice lze interpretovat jako

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o,$$

kde $o = 2(28+x)$ je obvod trojúhelníku a $r = 10$ poloměr jemu vepsané kružnice (středem této kružnice je společný bod vyznačených úseček uvnitř trojúhelníku). Tento vzorec lze najít v povolených tabulkách, tedy na něm založené řešení by mělo být považováno za správné.

Z9–II–3

Iveta postupně vypisovala přirozená čísla tvořená číslicemi 1, 3, 5, 7. Žádné jiné číslice nepoužila, postupovala vzestupně od nejmenšího čísla a žádné číslo neopomněla. Čísla psala bezprostředně za sebou a tak sestavovala jedno mimořádně dlouhé číslo:

$$1357111315173133\ldots$$

Která číslice je v tomto čísle na 1286. místě? (*E. Novotná*)

Možné řešení. Z daných číslic Iveta vytvořila 4 jednomístná čísla. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle 4 místa.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^2 = 16$ dvojmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $2 \cdot 16 = 32$ míst. Poslední číslice posledního dvojmístného čísla je na 36. místě $(4 + 32 = 36)$.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^3 = 64$ trojmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $3 \cdot 64 = 192$ míst. Poslední číslice posledního trojmístného čísla je na 228. místě $(36 + 192 = 228)$.

Z daných číslic Iveta vytvořila $4^4 = 256$ čtyřmístných čísel. Všechna tato čísla zabírají v Ivetině dlouhém čísle $4 \cdot 256 = 1024$ míst. Poslední číslice posledního čtyřmístného čísla je na 1252. místě $(228 + 1024 = 1252)$.

Do 1286. místa chybí 34 míst, a ta jsou obsazena pětimístnými čísly. Přitom $34 : 5$ je 6 a zbytek 4. Tedy hledaná číslice je 4. číslicí v 7. pětimístném čísle, které Iveta vytvořila. Tato čísla seřazená vzestupně jsou:

$$11111, 11113, 11115, 11117, 11131, 11133, 111\underline{3}5.$$

V Ivetině dlouhém čísle je na 1286. místě číslice 3.

Hodnocení. 2 body za počty jedno-, dvoj-, troj- a čtyřmístných čísel; 2 body za počty míst těchto čísel v Ivetině dlouhém čísle; 2 body za určení hledané číslice a kvalitu komentáře.

Z9–II–4

V pěti pytlících je dohromady 52 kuliček. V žádných dvou pytlících není stejný počet kuliček, některý pytlík může být i prázdný. Všechny kuličky z kteréhokoli (neprázdného) pytlíku lze přemístit do ostatních čtyř pytlíků tak, že v nich budou stejné počty kuliček.

a) Najděte nějaké rozdělení kuliček do pytlíků, které má všechny uvedené vlastnosti.
b) Ukažte, že při jakémkoli rozdělení s uvedenými vlastnostmi je v některém pytlíku právě 12 kuliček. *(J. Zhouf)*

Možné řešení. Po přemístění kuliček je jeden pytlík prázdný a v ostatních čtyřech jsou jich stejné počty. Dohromady je kuliček 52, tedy po přemístění je v neprázdných pytlících po 13 kuličkách ($52 : 4 = 13$). Proto původně nemohlo být v žádném pytlíku víc než 13 kuliček.

a) Možné původní počty kuliček v pytlících odpovídají možným vyjádřením čísla 52 jakožto součtu pěti navzájem různých nezáporných celých čísel, která nejsou větší než 13. Zkoušením lze najít tyto možnosti:

$$52 = 13+12+11+10+6 = 13+12+11+9+7 = 13+12+10+9+8.$$

b) Pokud by v žádném pytlíku nebylo víc než 12 kuliček, potom by ve všech dohromady bylo nejvýše $12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 50$ kuliček. Tedy v některém pytlíku muselo být 13 kuliček.

Pokud by v žádném pytlíku nebylo 12 kuliček, potom by ve všech dohromady bylo nejvýše $13+11+10+9+8 = 51$ kuliček. Tedy v některém pytlíku muselo být 12 kuliček.

Poznámka. Rozdělení uvedená v části a) jsou jediná možná. To lze zdůvodnit systematickým dosazováním postupně se zmenšujících navzájem různých sčítanců ne větších než 13 a kontrolou jejich součtu. V každé z uvedených možností se vskutku vyskytuje číslo 12.

Hodnocení. 1 bod za nějaké vyhovující rozdělení; 2 body za zdůvodnění, že v žádném pytlíku nebylo víc než 13 kuliček; 3 body za zdůvodnění, že v některém pytlíku bylo 12 kuliček. Řešení části b) založená na předchozí poznámce mohou být hodnocena plným počtem bodů v závislosti na úplnosti komentáře k části a). Řešení obsahující všechny možnosti bez zdůvodnění hodnoťte 2 body.