I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Zajíc běží závod na 2024 metrů. Při startu se odrazil levou nohou a po celou dobu závodu pravidelně střídá levou, pravou a obě nohy. Když se zajíc odrazí levou nohou, skočí 35 dm, když se odrazí pravou nohou, skočí 15 dm, a když se odrazí oběma nohama, skočí 61 dm.

Kolik skoků zajíc udělá, než dorazí do cíle? A kterou nohou se bude odrážet před cílovým skokem? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vše budeme počítat v decimetrech. Závod je dlouhý 20 240 dm a popsaný zajícův trojskok měří $35 + 15 + 61 = 111$ dm. Dělením se zbytkem zjistíme, že

$$20\,240 = 182 \cdot 111 + 38.$$

Tedy po 182 trojskocích zbývá zajíci do cíle 38 dm.

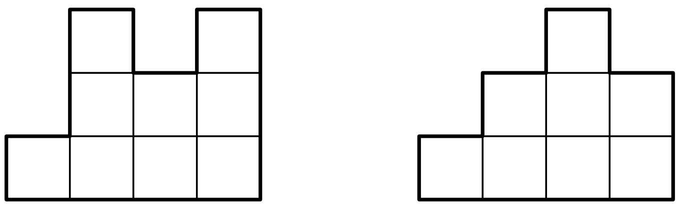
Další odraz vychází na levou nohu, skočí 35 dm a do cíle zbývají 3 dm. Další odraz vychází na pravou nohu a tímto skokem spolehlivě proskočí cílem.

Celkem zajíc udělá $182 \cdot 3 + 2 = 548$ skoků, před cílovým skokem se odrazí pravou nohou.

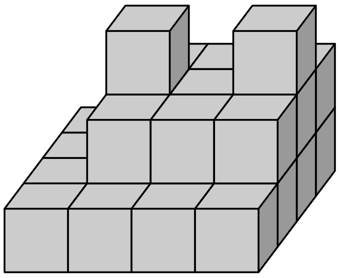
Z5–I–2

Zuzka postavila ze šestnácti stejně velkých kostek čtverec o rozměrech 4×4 kostky. S dalšími stejnými kostkami pokračovala ve stavění. Kostky na sebe stavěla tak, že každé dvě sousední kostky měly společnou celou stěnu. Výsledná stavba vypadala ze dvou různých stran jako na následujícím obrázku.

Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně kostek Zuzka na svou stavbu mohla použít. (*E. Novotná*)

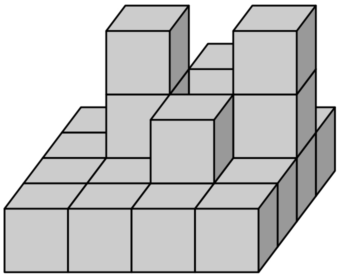


Možné řešení. V první vrstvě bylo 16 kostek. Z uvedených pohledů plyne, že ve třetí vrstvě byly 2 kostky. Počet kostek ve druhé vrstvě nelze jednoznačně určit, nejvíc jich však mohlo být $3 \cdot 3 = 9$. Tato možnost je znázorněna na následujícím obrázku, v níž dva zadané průměty odpovídají pohledu zpředu a zprava:



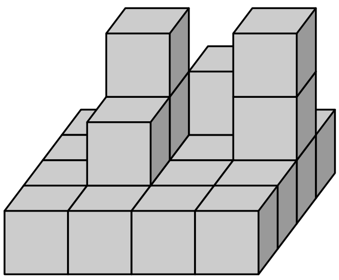
Skutečně nelze přidat jedinou kostku, aby se nezměnil některý z daných průmětů. Zuzka použila nejvíce $16 + 9 + 2 = 27$ kostek.

K nejmenšímu možnému počtu kostek lze dospět tak, že se ze druhé vrstvy postupně odebírá co nejvíce kostek, aniž by se změnil některý z daných průmětů. Jedna taková možnost vypadá takto:

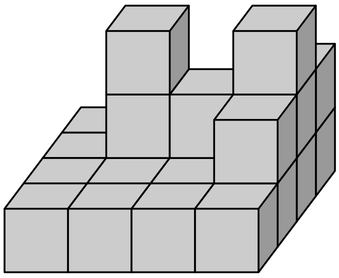


Méně než čtyři kostky ve druhé vrstvě být nemohou. Dvě kostky, na kterých stojí kostky z vrstvy třetí, jsou při pohledu zprava v zákrytu. Proto musí být použity další dvě kostky, aby tento průmět souhlasil se zadáním. Zuzka použila nejméně $16 + 4 + 2 = 22$ kostek.

Poznámka. U možnosti s nejmenším počtem kostek mohou být kostky ve druhé vrstvě rozmístěny různě, avšak nikoli libovolně. Jiné možné rozmístění je toto:



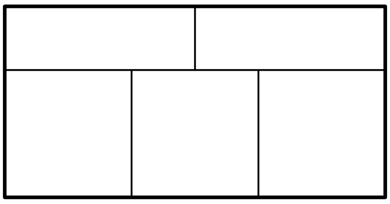
Úpravami ve druhé vrstvě lze mít stavbu s jakýmkoli počtem kostek v rozmezí od 22 do 27 kostek. Zde je jedna možnost postavená z 23 kostek:



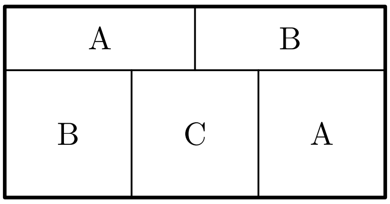
Z5–I–3

Katka měla na zahrádce pět záhonů rozmístěných jako na obrázku. Záhony chtěla osadit česnekem, mrkví a ředkvičkou tak, aby na každém záhonu byl jen jeden druh zeleniny a aby žádné dva záhony se stejnou zeleninou nesousedily.

Kolika způsoby mohla Katka záhony osázet? (*L. Hozová*)



Možné řešení. Záhony se stejnou zeleninou označíme stejným písmenem, záhony s různými zeleninami různými písmeny. Aby záhony se stejnou zeleninou nesousedily, musí být osázeny takto:



Záhony A může Katka osadit libovolnou ze tří plodin, záhony B libovolnou ze zbývajících dvou plodin a záhon C poslední zbylou plodinou. Katka tedy může záhony osázet $3 \cdot 2 = 6$ způsoby.

Poznámka. Všechna možná přiřazení plodin záhonům jsou vypsána zde:

česnek	A	A	C	C	B	B
mrkev	B	C	A	B	C	A
ředkvička	C	B	B	A	A	C

Pokud je česnek na záhonu A, potom mrkev může být buď na záhonu B, nebo C, a ředkvička na zbývajícím záhonu. Takto je postupně vyčerpáno všech $3 \cdot 2 = 6$ možností. Každé dva sousední sloupce v tabulce se liší prohozením dvou písmen a žádný sloupec se neopakuje.

Z5–I–4

V zahrádkářské osadě měl pan Jahoda ve svém sudu 16 litrů vody. Soused pan Malina měl ve svém sudu třikrát více vody než pan Jahoda. Začalo pršet a do obou sudů napršelo stejné množství vody. Po dešti pan Malina zjistil, že má v sudu dvakrát více vody než pan Jahoda.

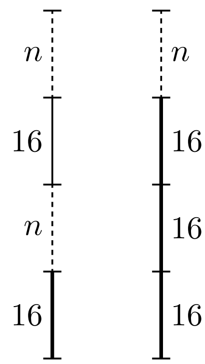
Kolik litrů vody napršelo do každého sudu? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Před deštěm měl pan Malina ve svém sudu $3 \cdot 16 = 48$ litrů vody, což je o 32 litrů více než v sudu pana Jahody.

Do obou sudů napršelo stejně, tedy rozdíl množství vody v sudech po dešti byl opět 32 litrů jako před deštěm. Po dešti bylo v sudu pana Maliny dvakrát více vody než v sudu pana Jahody, tedy v Jahodově sudu bylo 32 a Malinově sudu 64 litrů vody.

Do každého sudu napršelo 16 litrů vody ($48 - 32 = 64 - 48 = 16$).

Poznámka. Úlohu lze znázornit pomocí úseček



či zapsat rovnicí

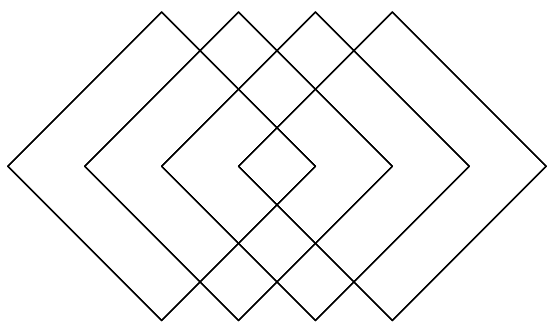
$$2 \cdot 16 + 2n = 3 \cdot 16 + n,$$

kde n značí množství napršené vody.

Z5–I–5

Ze čtyř shodných čtverců byl vytvořen ornament jako na obrázku. Strany čtverců jsou dlouhé 4 cm, jsou navzájem rovnoběžné či kolmé a protínají se buď ve svých čtvrtinách, nebo polovinách. Libor chtěl ornament vybarvit a zjistil, že barva na $1\,\mathrm{cm}^2$ každého souvislého pole ho bude stát tolik korun, kolika čtvercům je toto pole společné.

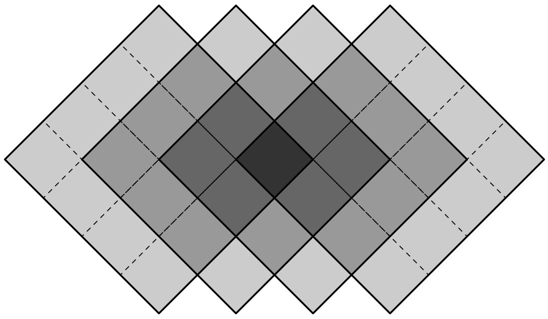
Kolik korun bude stát barva na vybarvení ornamentu? (*K. Pazourek*)



Možné řešení. Cena barvy v každé části odpovídá počtu čtverců, kterým je tato část společná. To je stejné, jako by všechny čtverce byly samostatně vybarveny barvou stejné ceny.

Každý čtverec má obsah $4 \cdot 4 = 16\,\mathrm{cm}^2$, čtverce jsou čtyři a $1\,\mathrm{cm}^2$ barvy stojí 1 korunu. Tedy barva na vybarvení ornamentu bude stát $16 \cdot 4 = 64$ korun.

Jiné řešení. Různými odstíny šedi rozlišíme, kolika čtvercům jsou jednotlivé části ornamentu společné. Ornament rozdělíme na čtverečky o straně 1 cm:



Všem čtyřem čtvercům je společný 1 čtvereček, třem čtvercům přísluší 6 čtverečků, dvěma čtvercům 12 čtverečků a jednomu čtverci 18. Tedy barva na vybarvení ornamentu bude stát

$$1 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 1 = 64 \text{ korun.}$$

Z5–I–6

Lucka napsala na lístek číslo 12345 a dvakrát jej mezi číslicemi rozstřihla. Získala tak tři menší kartičky se třemi čísly. Tyto kartičky přeskládala dvěma způsoby, čímž dostala dvě různá pětimístná čísla. Rozdíl těchto dvou čísel byl 28 926.

Mezi kterými číslicemi Lucka lístek rozstřihla? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pro názornost si úlohu napíšeme jako písemné odčítání, jehož výsledek je 28 926 a kde hvězdičky na každém řádku zastupují číslice od 1 do 5:

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ - * * * * * \\ \hline 2\ 8\ 9\ 2\ 6 \end{array}$$

Číslici na místě jednotek lze dostat jedině takto (s přechodem přes desítku):

$$\begin{array}{r} * * * * 1 \\ - * * * * 5 \\ \hline 2\ 8\ 9\ 2\ 6 \end{array}$$

Se zbylými použitelnými číslicemi lze číslici na místě desítek dostat jedině některým z následujících způsobů:

$$\begin{array}{r} * * * 4\ 1 \\ - * * * 1\ 5 \\ \hline 2\ 8\ 9\ 2\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * 5\ 1 \\ - * * * 2\ 5 \\ \hline 2\ 8\ 9\ 2\ 6 \end{array}$$

a) V prvním případě by lístek musel být rozstřižen takto 1|234|5 a kartičky přeskládány 5|234|1 a 234|1|5. V tomto případě rozdíl vyhovuje zadání:

$$\begin{array}{r} 5\,2\,3\,4\,1 \\ -\,2\,3\,4\,1\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

b) Ve druhém případě by lístek musel být rozstřižen takto 1|2|34|5, což jsou tři (a nikoli dva) střihy. Tento případ nevyhovuje zadání.

Lucka lístek rozstřihla mezi číslicemi 1 a 2 a mezi číslicemi 4 a 5.

Poznámka. Nutnost střihu mezi číslicemi 1 a 2 plyne již z prvního postřehu. Nutnost střihu mezi číslicemi 4 a 5 (a následného přeskládání) plyne z této úvahy: pokud by číslici 5 předcházela 4, potom bychom museli umět doplnit

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,*\,1 \\ -\,*\,*\,*\,4\,5 \\ \hline 2\,8\,9\,2\,6 \end{array}$$

V takovém případě by v menšenci na místě desítek musela být číslice 7, kterou však nemáme k dispozici.

Jiné řešení. Lístek lze nadvakrát rozstřihnout šesti způsoby:

1|2|345, 1|23|45, 1|234|5, 12|3|45, 12|34|5, 123|4|5.

Vzniklé tři kartičky lze přeskládat šesti způsoby, což schematicky (vzestupně) zapíšeme takto:

$$A|B|C, \quad A|C|B, \quad B|A|C, \quad B|C|A, \quad C|A|B, \quad C|B|A.$$

Probráním všech možností lze najít rozstříhání a přeskládání, jež vyhovují zadání.

Místo zkoumání možných rozdílů (kterých je pro každé rozstříhání 15) lze postupovat tak, že k příslušné šestici čísel přičteme požadovaný rozdíl 28926 a ověříme, zda je mezi výsledky některé číslo z dané šestice. Největší číslo, které lze z číslic od 1 do 5 vytvořit, je 54321. Tedy největší číslo, ke kterému má smysl požadovaný rozdíl přičítat, je 25395. Tím se zkoušení podstatně omezuje a vypadá následovně (opakující se či předem zamítnuté možnosti píšeme do závorek):

a) Po rozstříhání 1|2|345 lze sestavit čísla

12345, 13452, 21345, 23451, 34512, 34521

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

41271, 42378, 50271, 52377, $(> 54321, \ldots)$

Žádná možnost nevyhovuje.

b) Po rozstříhání 1|23|45 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 14523, \quad 23145, \quad 23451, \quad 45123, \quad 45231$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 43449, \quad 52071, \quad (52377, \quad > 54321, \quad \ldots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

c) Po rozstříhání 1|234|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 15234, \quad 23415, \quad 23451, \quad 51234, \quad 52341$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 44160, \quad 52341, \quad (52377, \quad > 54321, \quad \ldots)$$

Vyhovuje možnost $23451 + 28926 = 52341$.

d) Po rozstříhání 12|3|45 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12453, \quad 31245, \quad 34512, \quad 45123, \quad 45312$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41379, \quad (> 54321, \quad \ldots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

e) Po rozstříhání 12|34|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12534, \quad 34125, \quad 34512, \quad 51234, \quad 53412$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41460, \quad (> 54321, \quad \ldots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

f) Po rozstříhání 123|4|5 lze sestavit čísla

$$12345, \quad 12354, \quad 41235, \quad 45123, \quad 51234, \quad 54123$$

Po přičtení 28926 postupně dostáváme

$$(41271), \quad 41280, \quad (> 54321, \quad \ldots)$$

Žádná možnost nevyhovuje.

Jediná vyhovující možnost vychází v případě c): Lucka lístek rozstřihla mezi číslicemi 1 a 2 a mezi číslicemi 4 a 5.

Poznámka. V případě a) je rozdíl největšího a nejmenšího čísla z dané šestice 22176. Všechny ostatní rozdíly jsou menší, proto požadovaný rozdíl 28926 dostat nelze a nebylo nutné cokoli dál zkoušet.

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Kamarádi Jarda, Přemek a Robin hráli kuličky. Jardovi se moc nedařilo, takže po hře měl nejméně kuliček ze všech. Klukům to bylo líto, proto dal Robin Jardovi polovinu všech svých kuliček a Přemek třetinu svých. Teď měl nejvíc kuliček Jarda, a tak svým kamarádům vrátil po sedmi kuličkách. Po těchto výměnách měli všichni stejně, a to 25 kuliček.

Kolik kuliček měl po hře (před výměnami) Jarda? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Úlohu můžeme s výhodou řešit odzadu:

- Před druhým (posledním) kolem výměn měli Přemek a Robin o sedm kuliček méně, zatímco Jarda o 14 kuliček více. Tedy Přemek a Robin měli $25 - 7 = 18$ kuliček, zatímco Jarda jich měl $25 + 14 = 39$.
- Před prvním kolem výměn měl Robin dvojnásobek kuliček (polovinu dal Jardovi, zbyla mu polovina) a Přemek tři poloviny kuliček (třetinu dal Jardovi, zbyly mu dvě třetiny). Tedy Robin měl $2 \cdot 18 = 36$ kuliček a Přemek $\frac{3}{2} \cdot 18 = 27$ kuliček.
- Během přerozdělování byl celkový počet kuliček stále stejný. Součet po druhém, resp. prvním kole výměn byl $25+25+25 = 18+18+39 = 75$ kuliček. Před první výměnou (po hře) měl Robin 36 a Přemek 27 kuliček. Tedy po hře měl Jarda

$$75 - 36 - 27 = 12 \text{ kuliček.}$$

Poznámka. Znázornění předchozích úvah, příp. kontrola výsledků může vypadat takto:

stavy	Robin	Přemek	Jarda	výměny
po 2. kole výměn	25	25	25	
		$\uparrow 7$	$\downarrow 7$	Jarda Přemkovi
	$\uparrow 7$		$\downarrow 7$	Jarda Robinovi
po 1. kole výměn	18	18	39	
	$\downarrow 18$		$\uparrow 18$	Robin Jardovi
		$\downarrow 9$	$\uparrow 9$	Přemek Jardovi
po hře	36	27	12	

Z6–I–2

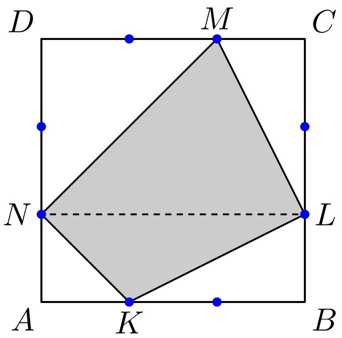
Karolína narýsovala čtverec o straně 6 cm. Na každé straně čtverce vyznačila modrou barvou dva body, kterými rozdělila příslušnou stranu na tři shodné části. Potom sestrojila čtyřúhelník, který měl všechny vrcholy modré a jehož žádné dva vrcholy neležely na stejné straně čtverce.

Jaké obsahy čtyřúhelníků mohla Karolína dostat? Uveďte všechny možnosti.

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Čtyřúhelníky s různými obsahy lze rozlišit následovně:

a) Některá úhlopříčka čtyřúhelníku je rovnoběžná se stranou čtverce. Označme vrcholy čtverce a čtyřúhelníku tak, že úhlopříčka LN je rovnoběžná se stranami AB a CD:

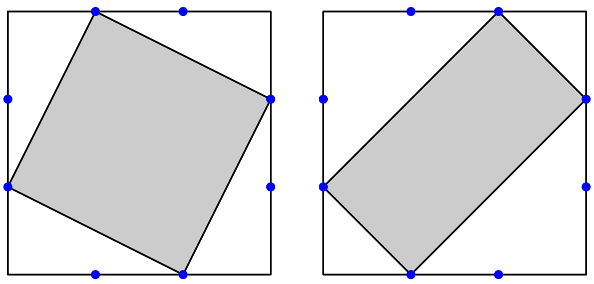


Obsah trojúhelníku LNK je polovinou obsahu obdélníku $LNAB$, obsah trojúhelníku LNM je polovinou obsahu obdélníku $LNDC$. Trojúhelníky LNK a LNM tvoří dohromady celý čtyřúhelník, obdélníky $LNAB$ a $LNDC$ tvoří dohromady daný čtverec. Obsah čtverce je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2)$, obsah čtyřúhelníku $KLMN$ je poloviční:

$$36 : 2 = 18\,(\mathrm{cm}^2).$$

Není podstatné, zda rovnoběžné úsečky uvažujeme vodorovně nebo svisle. Také umístění bodů K a M na stranách čtverce nehraje v předchozí úvaze žádnou podstatnou roli.

b) Žádná úhlopříčka čtyřúhelníku není rovnoběžná se stranou čtverce. V tomto případě rozlišujeme dvě možnosti:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli z těchto čtyřúhelníků dává čtyřúhelník, jehož úhlopříčka je rovnoběžná se stranou čtverce (tedy případ diskutovaný výše). Uvedené čtyřúhelníky mají navzájem různé obsahy, a ty vyjádříme jako rozdíl obsahu celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. Obsah čtverce je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2)$. Rožky jsou trojího typu a jejich obsahy jsou

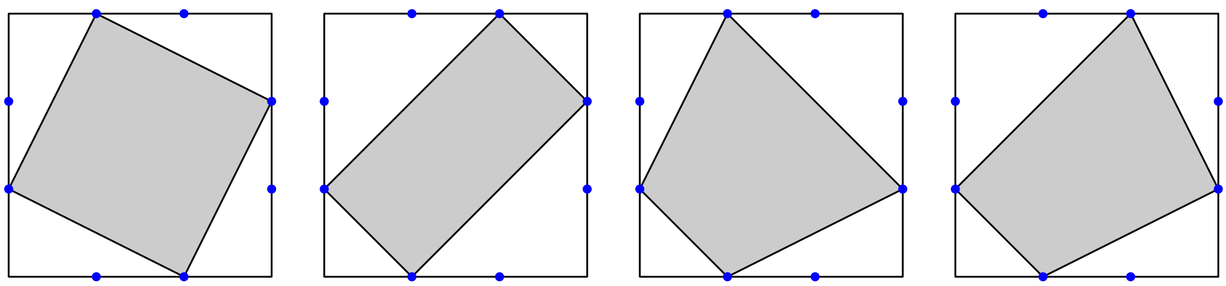
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\,(\mathrm{cm}^2), \quad \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\,(\mathrm{cm}^2), \quad \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsahy prvního a druhého čtyřúhelníku jsou

$$36 - 4 \cdot 4 = 20\,(\mathrm{cm}^2), \quad 36 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 8 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a $20\,(\mathrm{cm}^2)$.

Jiné řešení. Na každé straně čtverce Karolína vybírala jeden ze dvou modrých bodů jako vrchol čtyřúhelníku. Takto mohla sestrojit celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ čtyřúhelníků. Mnohé z nich jsou však navzájem shodné, tedy mají stejné obsahy. Navzájem neshodné čtyřúhelníky, které mohla Karolína sestrojit, jsou čtyři:



Skutečně platí, že záměna kteréhokoli vrcholu v kterémkoli čtyřúhelníku dává čtyřúhelník, který je shodný s jiným z těchto čtyřúhelníků.

Obsah každého čtyřúhelníku lze vyjádřit jako rozdíl obsahu celého čtverce a obsahů čtyř trojúhelníkových rožků. U třetího a čtvrtého čtyřúhelníku odečítáme stejné rožky (pouze jiným způsobem), proto jsou obsahy těchto čtyřúhelníků stejné. Stačí tedy prověřit první tři čtyřúhelníky. Jejich obsahy jsou vypočteny v předchozím řešení.

Karolína mohla dostat čtyřúhelníky s obsahy 16, 18 a $20\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámky. Případné shodnosti v předchozí úvaze patří mezi souměrnosti čtverce, tj. zobrazení, které zachovávají daný čtverec. Ty zahrnují osové souměrnosti, středovou souměrnost a otáčení o 90°. Čtverec má celkem osm souměrností.

Z6–I–3

V osmimístném čísle je každá jeho číslice (kromě poslední) větší než číslice následující. Kolik je všech takových čísel? (*I. Jančigová*)

Možné řešení. Popsaná čísla lze sestavit tak, že z deseti dostupných číslic se odstraní dvě a zbylých osm se uspořádá sestupně. To je stejné, jako by se z desetimístného čísla 9876543210 odstranily dvě číslice:

- Pokud bychom z tohoto čísla jako první číslici odstranili 9, potom zbývá devět možností, kterou číslici odstranit jako druhou.

- Pokud bychom jako první číslici odstranili 8, potom zbývá osm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojice 8 a 9 je zahrnuto v předchozím případě).
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 7, potom zbývá sedm možností, kterou číslici odstranit jako druhou (odstranění dvojic 7, 8 a 7, 9 je zahrnuto v předchozích případech).
- V podobném duchu uvažujeme až do konce…
- Pokud bychom jako první číslici odstranili 1, potom zbývá jediná možnost, kterou číslici odstranit jako druhou, a to 0.

Celkový počet možností, tedy počet všech čísel vyhovujících zadání, je

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45.$$

Jiné řešení. Počet možností, jak odstranit dvě číslice z desíti, lze určit následovně:

První číslici z desíti lze vybrat deseti způsoby. Druhou číslici ze zbylých devíti číslic lze vybrat devíti způsoby. To dává celkově $10 \cdot 9 = 90$ možností, jak vybrat dvě číslice z desíti s ohledem na pořadí výběru. Toto pořadí nás však nezajímá — není podstatné, v jakém pořadí číslice vybíráme, ale které vybereme. Tedy celkový počet možností je poloviční:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45.$$

Poznámka. Předchozí dvojí vyjádření téhož výsledku lze zobecnit takto:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1).$$

Toto číslo vyjadřuje počet všech dvojic, které lze utvořit z n prvků (bez ohledu na pořadí výběru).

Z6–I–4

V následujícím písemném násobení dvou trojmístných čísel jsou mnohé číslice zastoupeny hvězdičkami. Místo hvězdiček doplňte číslice tak, aby byl výpočet platný:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & * \\
\times & & & * & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * \\
 & 3 & 1 & 7 & 5 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & 6 & * & *
\end{array}$$

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle známého postupu je druhý mezivýsledek 3175 součinem prvního činitele a druhé číslice druhého činitele. Jako součin trojmístného a jednomístného čísla lze číslo 3175 vyjádřit jediným způsobem, a to $635 \cdot 5$ (prvočíselný rozklad je $3175 = 5 \cdot 5 \cdot 127$). Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 6 & 3 & 5\\
\times & & & * & 5 & *\\
\hline
 & & * & * & * & *\\
 & 3 & 1 & 7 & 5 & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & 6 & * & *
\end{array}$$

Třetí mezivýsledek je trojmístné číslo, které je součinem 635 a první číslice druhého činitele. Jediným trojmístným násobkem čísla 635 je samo toto číslo. Tedy můžeme doplnit:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 6 & 3 & 5\\
\times & & & 1 & 5 & *\\
\hline
 & & * & * & * & *\\
 & 3 & 1 & 7 & 5 & \\
 & 6 & 3 & 5 & & \\
\hline
 & * & * & 6 & * & *
\end{array}$$

První mezivýsledek je čtyřmístné číslo, které je součinem 635 a třetí číslice druhého činitele. Čtyřmístné násobky čísla 635 jsou tyto:

$$\begin{array}{llll}
635 \cdot 2 = 1270, & 635 \cdot 3 = 1905, & 635 \cdot 4 = 2540, & 635 \cdot 5 = 3175,\\
635 \cdot 6 = 3810, & 635 \cdot 7 = 4445, & 635 \cdot 8 = 5080, & 635 \cdot 9 = 5715.
\end{array}$$

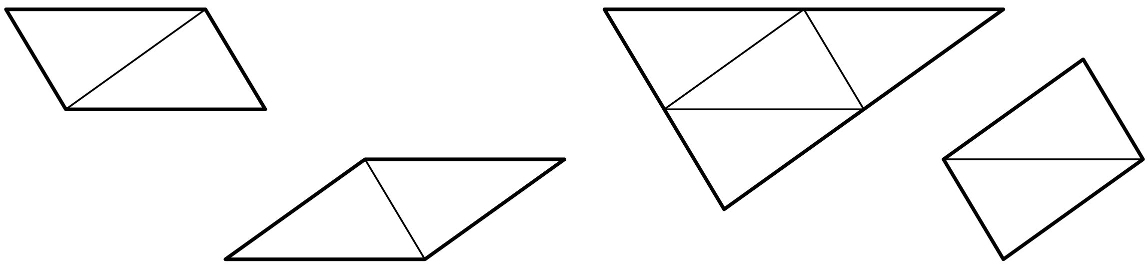
Aby třetí číslice ve výsledném součinu byla 6, musí být druhá číslice prvního mezivýsledku buď 3, nebo 4 (podle toho, zda došlo k přechodu přes desítku či nikoli). Mezi výše uvedenými kandidáty splňuje tuto podmínku pouze číslo 4445. Tedy můžeme doplnit a dopočítat výsledek:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 6 & 3 & 5\\
\times & & & 1 & 5 & 7\\
\hline
 & & 4 & 4 & 4 & 5\\
 & 3 & 1 & 7 & 5 & \\
 & 6 & 3 & 5 & & \\
\hline
 & 9 & 9 & 6 & 9 & 5
\end{array}$$

Z6–I–5

Péťa složil z navzájem shodných trojúhelníků několik rovinných útvarů, viz obrázek. Obvody prvních tří jsou postupně 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.

Určete obvod čtvrtého útvaru. (*E. Semerádová*)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

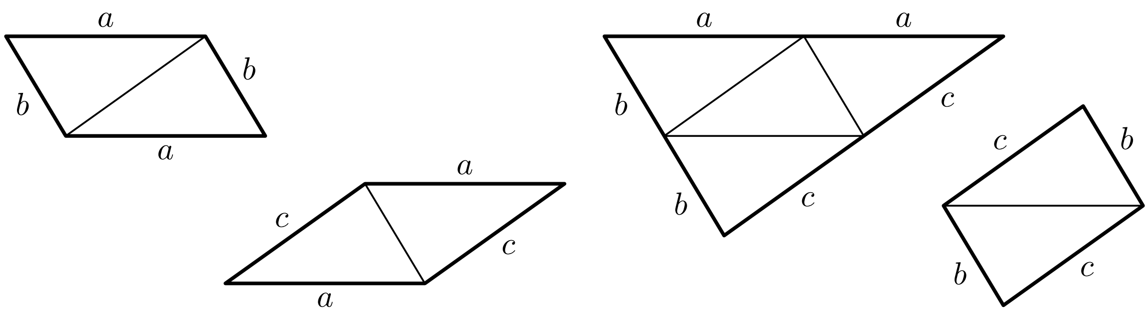
Možné řešení. V obvodech prvního, druhého a čtvrtého útvaru jsou započteny vždy dvě ze tří stran základního trojúhelníku, a to tak, že každá ze dvou stran je započtena dvakrát a v obvodech různých útvarů jsou zahrnuty různé dvojice stran.

V obvodu třetího útvaru jsou započteny všechny strany základního trojúhelníku, a to opět každá dvakrát.

Tedy součet obvodů prvního, druhého a čtvrtého útvaru je roven dvojnásobku obvodu třetího útvaru. To znamená, že neznámý obvod čtvrtého útvaru je roven rozdílu obvodů prvního a druhého útvaru od dvojnásobku obvodu třetího:

$$2 \cdot 14{,}7 - 8 - 11{,}4 = 29{,}4 - 19{,}4 = 10\,(\text{cm}).$$

Poznámky. Ze zadání lze odvodit velikosti stran základního trojúhelníku, které pro tento účel označíme a, b, c:



Rozdíl obvodů třetího a prvního útvaru je roven dvojnásobku c, tedy

$$c = \frac{1}{2}(14{,}7 - 8) = 3{,}35\,(\text{cm}).$$

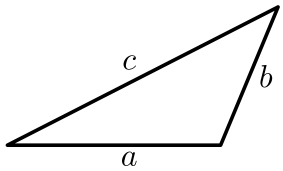
Rozdíl obvodů třetího a druhého útvaru je roven dvojnásobku b, tedy

$$b = \frac{1}{2}(14{,}7 - 11{,}4) = 1{,}65\,(\text{cm}).$$

Odtud a ze známých obvodů prvních tří útvarů lze vyjádřit velikost poslední strany základního trojúhelníku:

$$a = \frac{8}{2} - 1{,}65 = \frac{11{,}4}{2} - 3{,}35 = \frac{14{,}7}{2} - 1{,}65 - 3{,}35 = 2{,}35\,(\text{cm}).$$

Hodnoty a, b, c splňují trojúhelníkové nerovnosti ($1{,}65 + 2{,}35 > 3{,}35$ atd.), tedy trojúhelník se stranami těchto délek skutečně existuje a (až na měřítko) vypadá takto:



Z uvedeného můžeme pro kontrolu odvodit obvod čtvrtého útvaru:

$$2(b + c) = 2(1{,}65 + 3{,}35) = 10\,(\mathrm{cm}).$$

Z6–I–6

Aleš, Bára, Cyril, Dana, Eva, František a Gábina se stali na svých školách vítězi ve stolním fotbálku a sešli se na dvoudenním turnaji o celkového vítěze. Každé z těchto sedmi dětí mělo během turnaje sehrát jednu hru s každým jiným. První den turnaje odehrál Aleš jednu hru, Bára dvě hry, Cyril tři, Dana čtyři, Eva pět her a František šest.

Kolik her odehrála první den Gábina? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Dětí bylo sedm, tedy každé mohlo odehrát nejvýše šest her. František odehrál šest her, takže hrál s každým z přítomných dětí.

Aleš odehrál jednu hru, takže nehrál s nikým jiným než s Františkem. Eva odehrála pět her, takže hrála se všemi kromě Aleše.

Bára odehrála dvě hry, takže nehrála s nikým jiným než s Františkem a Evou. Dana odehrála čtyři hry, takže hrála se všemi kromě Aleše a Báry.

Cyril odehrál tři hry, a to s Františkem, Evou a Danou.

S Gábinou hráli František, Eva a Dana, tedy Gábina odehrála tři hry.

Poznámka. Předchozí závěry jsou přehledně vidět v tabulce:

	A	B	C	D	E	F	G
A	–					*	
B		–			*	*	
C			–	*	*	*	
D			*	–	*	*	*
E		*	*	*	–	*	*
F	*	*	*	*	*	–	*
G				*	*	*	–

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Ajka, Barborka, Cilka a Danek se dohadovali o počtu zrnek písku na jejich pískovišti. Danek sdělil kamarádkám svůj odhad a ty se jej rozhodly ověřit. Ajka napočítala 873 451 230, Barborka 873 451 227 a Cilka 873 451 213 zrnek. Součet (kladných) rozdílů těchto tří výsledků od Dankova odhadu byl 29.

Kolik zrnek písku mohl odhadovat Danek? Uveďte všechny možnosti. (*V. Bachratá*)

Možné řešení. Nejméně zrnek napočítala Cilka, nejvíce Ajka. Rozdíl výsledků Cilky a Barborky je 14, rozdíl výsledků Barborky a Ajky je 3, rozdíl výsledků Cilky a Ajky je 17. Pokud by Dankův odhad souhlasil s některým z těchto tří výsledků, potom by zmiňovaný součet rozdílů byl určen pouze dvěma sčítanci:

- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Cilky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $14 + 17 = 31$.
- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Barborky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $14 + 3 = 17$.
- Pokud by Dankův odhad souhlasil s výsledkem Ajky, potom by součet rozdílů od zbylých výsledků byl $17 + 3 = 20$.

Pro jiné hodnoty Dankova odhadu platí:

- Pokud by Dankův odhad byl menší než výsledek Cilky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl větší než 31.
- Pokud by Dankův odhad byl mezi výsledky Cilky a Barborky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl mezi 31 a 17.
- Pokud by Dankův odhad byl mezi výsledky Barborky a Ajky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl mezi 17 a 20.
- Pokud by Dankův odhad byl větší než výsledek Ajky, potom by součet rozdílů od všech výsledků byl větší než 20.

Tedy Dankův odhad mohl být mezi výsledky Cilky a Barborky, nebo být větší než výsledek Ajky. Postupným zkoušením v rámci těchto omezení odhalíme následující dvě možnosti:

- Pokud by Dankův odhad byl 873 451 215, potom by součet rozdílů od výsledků tří kamarádek byl $2 + 12 + 15 = 29$.
- Pokud by Dankův odhad byl 873 451 233, potom by součet rozdílů od výsledků tří kamarádek byl $20 + 6 + 3 = 29$.

Danek odhadoval počet zrnek v pískovišti buď na 873 451 215, nebo 873 451 233.

Poznámka. Pro úplnost doplňujeme několik dalších hodnot v rámci daných omezení (v Dankově odhadu píšeme jen poslední dvojčíslí):

Dankův odhad	< 13	*13*	14	15	16	17	...
součet rozdílů	> 31	*31*	30	29	28	27	...

...	26	*27*	28	29	*30*	31	32	33	> 33
...	18	*17*	18	19	*20*	23	26	29	> 29

Předchozí zkoušení lze nahradit několika výpočty. Např. za předpokladu, že Dankův odhad je mezi výsledky Cilky a Barborky, je součet rozdílů od výsledků tří kamarádek roven

$$(d - 13) + (27 - d) + (30 - d) = 44 - d,$$

kde d je poslední dvojčíslí Dankova odhadu. Tento součet je roven 29 právě tehdy, když $d = 15$, což odpovídá jedné z uvedených možností.

Z7–I–2

Pan Delfín a pan Žralok byli zdatní rybáři. Jednou dohromady ulovili 70 ryb. Pět devítin ryb, které ulovil pan Delfín, byli pstruzi. Dvě sedmnáctiny ryb, které ulovil pan Žralok, byli kapři.

Kolik ryb ulovil pan Delfín? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Počet ryb, které ulovil pan Delfín, byl násobkem 9 a nepřesahoval 70. Pan Delfín tedy mohl ulovit

$$9, \quad 18, \quad 27, \quad 36, \quad 45, \quad 54, \quad 63$$

ryb. Počet ryb, které ulovil pan Žralok, byl násobkem 17 a nepřesahoval 70. Pan Žralok tedy mohl ulovit

$$17, \quad 34, \quad 51, \quad 68$$

ryb. Dohromady ulovili 70 ryb, což lze z uvedených čísel vyjádřit jedině jako

$$70 = 36 + 34.$$

Pan Delfín ulovil 36 ryb.

Poznámka. K předchozímu výsledku není nutno zkoušet všechny možné součty (kterých je $7 \cdot 4 = 28$). Stačí probrat čtyři možné počty ryb pana Žraloka, zjistit, kolik ryb by odpovídalo panu Delfínovi (rozdíl od 70) a ověřit, zda je tento počet dělitelný 9:

$ž$	17	34	51	68
$d = 70 - ž$	53	36	19	2
$9 \mid d$?	ne	ano	ne	ne

Z7–I–3

Myslím si tři čísla. Když je sečtu, dostanu 15. Když od součtu prvních dvou čísel odečtu třetí, dostanu 10. Když od součtu prvního a třetího čísla odečtu druhé, dostanu 8.

Která čísla si myslím? (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Uvažme součet prvních dvou čísel. Pokud k tomuto součtu přičte Eva (autorka úlohy) třetí číslo, dostane 15, pokud totéž číslo odečte, dostane 10. Rozdíl $15 - 10 = 5$ tedy odpovídá dvojnásobku třetího čísla. Tedy třetí číslo je $5 : 2 = 2{,}5$.

Uvažme součet prvního a třetího čísla. Pokud k tomuto součtu Eva přičte druhé číslo, dostane 15, pokud totéž číslo odečte, dostane 8. Rozdíl $15 - 8 = 7$ tedy odpovídá dvojnásobku druhého čísla. Tedy druhé číslo je $7 : 2 = 3{,}5$.

Součet všech tří čísel je 15. Tedy první číslo je $15 - 2{,}5 - 3{,}5 = 9$.

Eva si myslí čísla 9, 3,5 a 2,5.

Poznámka. Úlohu lze vyjádřit pomocí soustavy rovnic

$$a + b + c = 15, \quad a + b - c = 10, \quad a - b + c = 8,$$

kde a, b a c značí po řadě první, druhé a třetí číslo. Předchozí úvahy lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned}
2c &= (a + b + c) - (a + b - c) = 15 - 10 = 5, \quad \text{tedy} \quad c = 2{,}5,\\
2b &= (a + b + c) - (a - b + c) = 15 - 8 = 7, \quad \text{tedy} \quad b = 3{,}5,\\
a &= (a + b + c) - b - c = 15 - 2{,}5 - 3{,}5 = 9.
\end{aligned}$$

Z7–I–4

Anetčin strýc má narozeniny ve stejný den v roce jako Anetčina teta. Strýc je starší než teta, ne však o víc než o deset let, a oba jsou plnoletí. Na poslední oslavě jejich narozenin si Anetka uvědomila, že když vynásobí jejich oslavované věky a výsledný součin ještě vynásobí počtem psů, kteří se na oslavě sešli, dostane číslo 2024.

Kolik psů mohlo být na této oslavě? Určete všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Číslo 2024 potřebujeme vyjádřit jako součin tří přirozených čísel, z nichž dvě jsou větší nebo rovna 18 a liší se nejvýše o 10. Vyhovující možnosti probereme na základě prvočíselného rozkladu čísla 2024, který vypadá následovně:

$$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23.$$

Prvočísla 11 a 23 patří k věkům tety a strýce, navíc každé někomu jinému; pokud by tomu tak nebylo, pak by z daných prvočísel nebylo možné vytvořit dva činitele větší než 18. Navíc žádný z věků nemůže být větší než $2 \cdot 23 = 46$ let; nejbližší vyšší možný věk je $2 \cdot 2 \cdot 23 = 92$ let a v takovém případě by z daných prvočísel nebylo možné vytvořit činitele, který by se od 92 lišil nejvýše o 10. Tedy stačí probrat následující možnosti:

- Pokud by tetě nebo strýci bylo 23 let, potom by druhému muselo být mezi 18 a 33 lety. Z možných činitelů tomuto omezení vyhovuje pouze $2 \cdot 11 = 22$. Tedy tetě mohlo být 22 a strýci 23 let. V tomto případě by na oslavě byli $2 \cdot 2 = 4$ psi.

- Pokud by tetě nebo strýci bylo $2 \cdot 23 = 46$ let, potom by druhému muselo být mezi 36 a 56 lety. Z možných činitelů tomuto omezení vyhovuje pouze $2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$. Tedy tetě mohlo být 44 a strýci 46 let. V tomto případě by na oslavě byl 1 pes.

  Na oslavě byl buď jeden pes, nebo čtyři psi.

Poznámka. Součin věků tety a strýce byl větší než $18 \cdot 18 = 324$. Tedy počet psů na oslavě byl roven nanejvýš celé části podílu $2024 : 324$, což je 6. Z daných prvočísel je možné sestavit pouze čísla 1, 2 a 4. Rozbor možností lze založit na těchto třech případech:

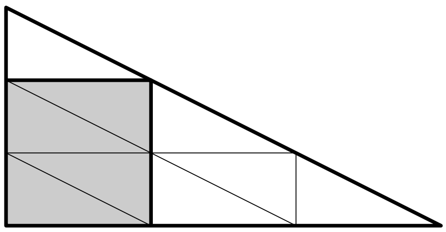
- Případy s 1 nebo se 4 psy možné jsou, viz předchozí řešení.
- Případ se 2 psy možný není. Součin věků tety a strýce by byl $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$, což lze jako součin dvou činitelů větších než 18 vyjádřit buď $22 \cdot 46$, nebo $44 \cdot 23$. V obou rozkladech však je rozdíl činitelů větší než 10.

Z7–I–5

Pravoúhlý trojúhelník má obsah $36\,\mathrm{m}^2$. V něm je umístěn čtverec tak, že dvě strany čtverce jsou částmi dvou stran trojúhelníku a jeden vrchol čtverce je ve třetině nejdelší strany.

Určete obsah tohoto čtverce. *(E. Novotná)*

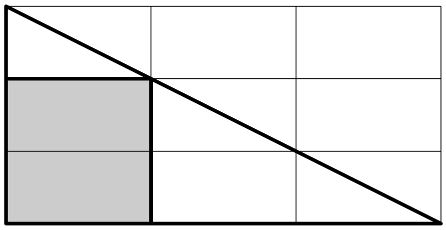
Možné řešení. Jediné možné umístění čtverce v rámci trojúhelníku je jako na následujícím obrázku. Dodatečné dělení stran na třetiny a spojení odpovídajících bodů příčkami rozdělí daný trojúhelník na 9 shodných trojúhelníčků:



Čtverec sestává ze čtyř trojúhelníčků, tedy poměr obsahu čtverce a daného trojúhelníku je $4 : 9$. Trojúhelník má obsah $36\,\mathrm{cm}^2$, tedy obsah čtverce je

$$\frac{4}{9} \cdot 36 = 4 \cdot 4 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámky. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je polovinou obsahu doplněného obdélníku. Předchozí myšlenku s třetinovým dělením lze rozvíjet také podle následujícího obrázku:



Z uvedeného mj. vyplývá, že odvěsny daného trojúhelníku jsou v poměru 1 : 2.

V rámci daného trojúhelníku lze objevit několik navzájem podobných trojúhelníků. Také tento postřeh lze využít k řešení úlohy.

Z7–I–6

Trpaslíci počítají svoje věky ve dnech, takže každý den slaví narozeniny. U trpaslíka Nosíka se sešlo sedm trpaslíků s věky 105, 120, 140, 168, 210, 280 a 420 dnů. Během oslavy se všem osmi trpaslíkům podařilo rozdělit do dvou skupin se stejnými součty věků.

Kolik nejméně a kolik nejvíce dnů mohlo být trpaslíkovi Nosíkovi? (*E. Novotná*)

Možné řešení. Součet věků sedmi trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, je 1443 dnů. Pokud by trpaslíci byli rozděleni tak, že v jedné skupině je sám Nosík a ve druhé skupině všichni ostatní, pak by Nosíkovi bylo 1443 dnů. Víc dnů Nosíkovi být nemůže.

Součet věků sedmi trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, tvoří lichý počet dnů. Aby součet věků všech osmi trpaslíků byl dělitelný dvěma, musel být Nosíkův počet dnů také lichý. Aby bylo možné rozdělit trpaslíky do dvou skupin se stejnými věky, musí jít ze sedmi známých věků vyjádřit jak polovinu součtu všech, tak polovinu tohoto součtu bez věku Nosíka. Postupně vzestupně probereme možnosti, dokud nenajdeme vyhovující. V následující tabulce značí N věk Nosíka a S součet věků všech osmi trpaslíků. Rozhodování na posledním řádku je vysvětleno níže:

N	1	3	5	7	9	11	13	...
S	1444	1446	1448	1450	1452	1454	1456	...
$\frac{1}{2}S$	722	723	724	725	726	727	728	...
$\frac{1}{2}S - N$	721	720	719	718	717	716	715	...
?	č	s	č	s	č	č	OK	...

Kromě dvou trpaslíků, kteří přišli Nosíka navštívit, jsou věky všech ostatních dělitelné 10. Tyto dva výjimečné věky končí číslicemi 5 a 8. Ze sedmi známých věků trpaslíků tedy lze vyjádřit pouze součty končící číslicemi 0, 5, 8 a 3 (podle toho, zda je zahrnuto žádné, jedno či obě zmiňovaná čísla). Tento postřeh vylučuje možnosti odpovídající $N = 1$, 5, 9, 11 (a mnohé další). Probereme ostatní možnosti:

- V případě $N = 3$ by v součtu $\frac{1}{2}S = 723$ musela být zahrnuta obě čísla 105 a 168:

$$723 = 105 + 168 + 450.$$

  Sčítanec 450 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Postupným zkoušením (např. od největšího z dostupných čísel) zjišťujeme, že to není možné.
- V případě $N = 7$ by v součtu $\frac{1}{2}S - N = 718$ muselo být zahrnuto číslo 168:

$$718 = 168 + 550.$$

Sčítanec 550 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Postupným zkoušením (např. od největšího z dostupných čísel) zjišťujeme, že to není možné.

- V případě $N = 13$ by v součtu $\frac{1}{2}S = 728$ muselo být zahrnuto číslo 168:

$$728 = 168 + 560.$$

Sčítanec 560 by musel jít vyjádřit pomocí čísel 120, 140, 210, 280 a 420. Zkoušením zjišťujeme $560 = 140 + 420$, tedy jsme našli nejmenší vyhovující řešení.

Nosík mohl mít nejméně 13 a nejvíce 1443 dnů.

Poznámky. Rozdělení do skupin s 13denním Nosíkem (tj. rozdělení odpovídající součtu $\frac{1}{2}S = 728$) vypadalo takto:

$$140 + 168 + 420 = 13 + 105 + 120 + 210 + 280.$$

V případech $N = 3$, resp. 7 je možné se zaměřit na druhý z diskutovaných součtů (tedy 720, resp. 725), který taktéž z dostupných čísel vyjádřit nelze.

Ve vylučování možností lze použít další vlastnosti daných čísel. Např. nemožnost vyjádření čísla 450 v případě $N = 3$ lze zdůvodnit následovně. Číslo 450 je dělitelné 10, ale není dělitelné 20. Z dostupných čísel má stejnou vlastnost pouze číslo 210, tedy ve vyjádření 450 musí být zahrnuto:

$$450 = 210 + 240.$$

Sčítanec 240 by musel jít vyjádřit pomocí zbylých čísel 120, 140, 280 a 420. Protože čísla 280 a 420 jsou větší než 240, připadá v úvahu pouze součet $120 + 140$. Ten je však také vetší než 240, takže vyjádření 450 není možné.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

V loňském roce bylo v našem skautském oddíle o 30 chlapců více než děvčat. Letos se počet dětí v oddíle zvětšil o 10 %, přičemž počet chlapců se zvětšil o 5 % a počet děvčat se zvětšil o 20 %.

Kolik dětí máme letos v oddíle? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Jak počty dětí, tak jejich letošní přírůstky jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Vzhledem k tomu, že $10\,\% = 10/100 = 1/10$, musel být původní počet všech dětí násobkem 10. Podobně platí, že původní počet chlapců byl násobkem 20, neboť $5\,\% = 5/100 = 1/20$, a původní počet děvčat byl násobkem 5, neboť $20\,\% = 20/100 = 1/5$.

Protože chlapců bylo o 30 více než děvčat, nejmenší možné původní počty byly následující (ch, resp. d značí původní počet chlapců, resp. děvčat):

ch	40	60	80	100	120	...
d	10	30	50	70	90	...
$ch + d$	50	90	130	170	210	...

Po započítání letošních přírůstků dostáváme následující přehled:

$1{,}05ch$	42	63	84	105	126	...
$1{,}2d$	12	36	60	84	108	...
$1{,}05ch + 1{,}2d$	54	99	144	189	234	...
$1{,}1(ch + d)$	55	99	143	187	231	...

Součet nových počtů chlapců a dívek je roven původnímu součtu zvětšenému o 10 % právě ve druhém případě; se zvětšujícími se čísly se rozdíl mezi těmito dvěma hodnotami jenom zvětšuje. Letos je ve skautském oddíle 99 dětí.

Poznámka. Problém lze zapsat pomocí rovnice

$$1{,}05ch + 1{,}2d = 1{,}1(ch + d),$$

kde $ch = d + 30$. Po dosazení a úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 2{,}25d + 31{,}5 &= 2{,}2d + 33, \\ 0{,}05d &= 1{,}5, \\ d &= 30, \end{aligned}$$

což odpovídá druhému z výše uvedených případů.

Z8–I–2

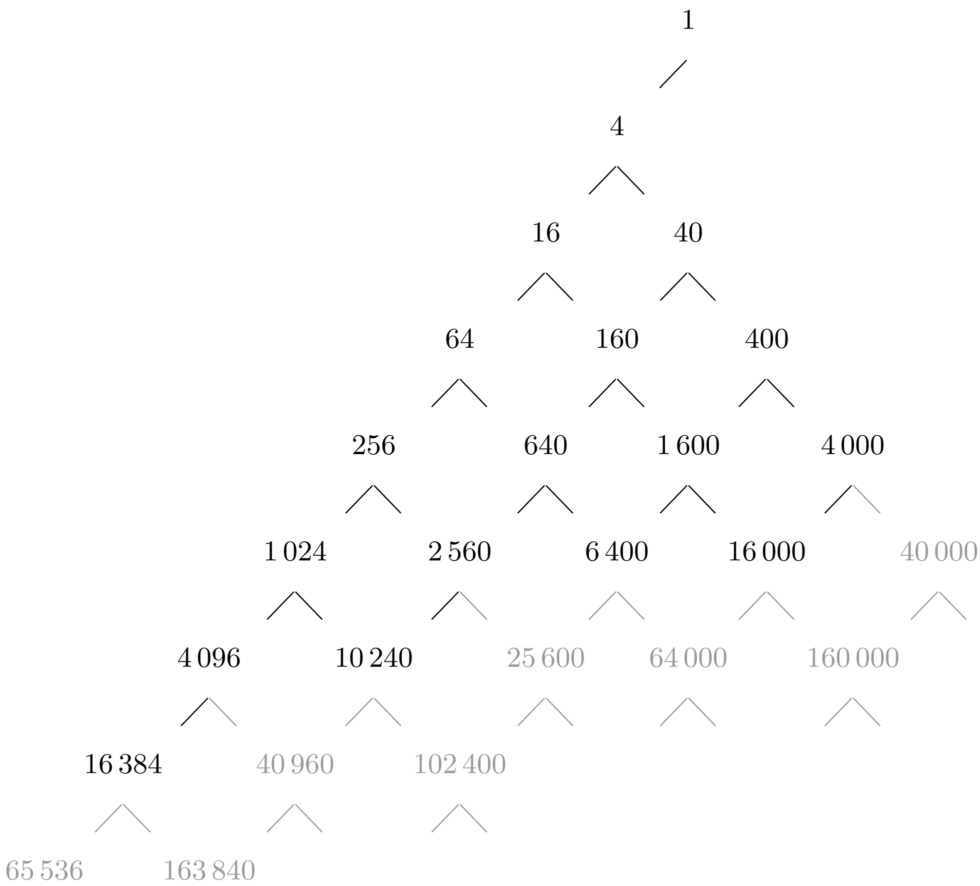
Adam měl papír, který byl natolik veliký, že by z něj šlo natrhat několik desítek tisíc kousků. Nejprve papír roztrhal na čtyři kousky. Každý z těchto kousků vzal a roztrhal buď na čtyři, nebo na deset kousků. Stejným způsobem pokračoval dál: každý nově vzniklý kousek roztrhal buď na čtyři, nebo na deset menších kousků.

Rozhodněte a vysvětlete, zda může Adam tímto způsobem natrhat přesně 20 000 kousků. *(I. Jančigová)*

Možné řešení. Když Adam roztrhá nějaký kousek na 4 menší kousky, celkový počet kousků se zvětší o 3. Když Adam roztrhá nějaký kousek na 10 menších kousků, celkový počet kousků se zvětší o 9. Zejména platí, že počet kousků po každém trhání dává stejný zbytek po dělení třemi. Na začátku měl Adam jeden kus papíru, tedy po každém trhání byl zbytek po dělení aktuálního počtu kousků třemi roven 1.

Avšak zbytek po dělení 20 000 : 3 je roven 2 (nejbližší číslo dělitelné 3 je 20 001). Tedy Adam nemohl natrhat 20 000 kousků.

Poznámka. Za předpokladu, že by Adam v každém kroku trhal všechny stávající kousky papíru stejným způsobem, by bylo možné počty kousků na konci každého kroku snadno sledovat:



Adam začal s jedním kusem papíru, po prvním trhání měl 4 kousky. Po druhém trhání by měl buď 16 ($= 4 \cdot 4$), nebo 40 ($= 4 \cdot 10$) kousků. Po třetím trhání by měl buď 64 ($= 16 \cdot 4$), nebo 160 ($= 16 \cdot 10 = 40 \cdot 4$), nebo 400 ($= 40 \cdot 10$) kousků atd. Čísla nalevo od svého předchůdce vznikla násobením 4, čísla napravo násobením 10. Čísla větší než 20 000 jsou napsána šedě. Mezi zbylými možnostmi se číslo 20 000 nevyskytuje, tedy Adam by takto daný počet nenatrhal.

V prvočíselném rozkladu každého z takto vzniklých čísel jsou pouze čísla 2 a 5, přičemž 2 je obsažena alespoň dvakrát (z prvního trhání) a ke každé 5 přísluší jedna 2 (z trhání na 10 kousků). Zejména rozdíl počtu 5 a počtu 2 je sudé číslo (jež je dvojnásobkem počtu trhání na 4 kousky). Prvočíselný rozklad čísla 20 000 vypadá následovně:

$$20\,000 = 2 \cdot 10\,000 = 2 \cdot 10^4 = 2^5 \cdot 5^4.$$

V rozkladu je počet 2 o jednu větší než počet 5, což potvrzuje předchozí závěr bez uvedeného vypisování.

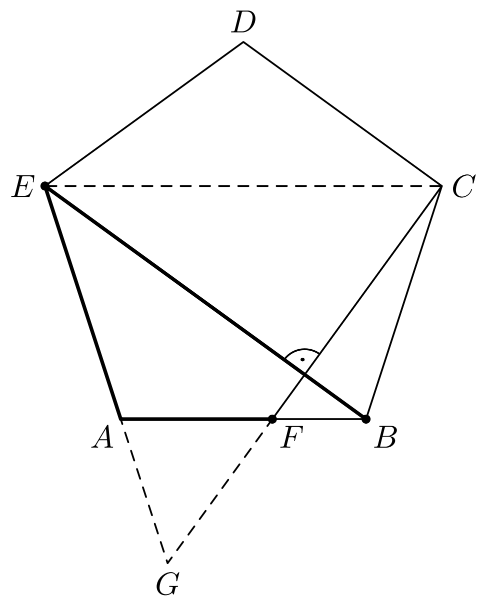
Řešení úlohy založená na tomto či podobném předpokladu sice nejsou úplná, ale lze je posuzovat alespoň jako částečně správná.

Z8–I–3

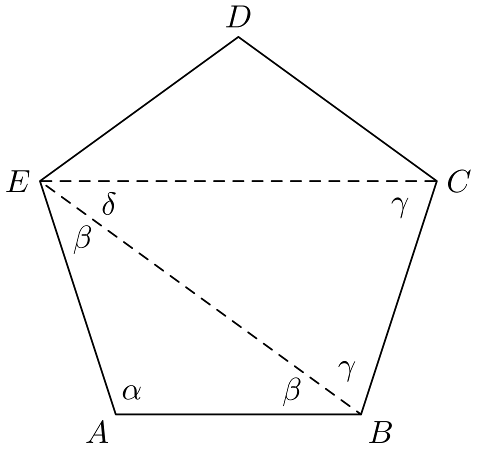
Ve sportovním areálu tvořila stanoviště A, B, C, D, E vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Tato stanoviště byla pospojována přímými cestami. Navíc na cestě z A do B byla fontána F, kterou se stanovištěm C spojovala cesta kolmá k cestě z B do E. Pat a Mat se sešli na stanovišti E a rozhodli se zamést některé cesty. Pat zametl cestu z E do B. Mat zametl cestu z E do A a ještě z A do F.

Určete rozdíl úseků zametených Patem a Matem. (*L. Hozová*)

Možné řešení. Doplníme průsečík přímek CF a AE, který označíme G:



V pravidelném pětiúhelníku jsou všechny strany navzájem shodné a stejně tak všechny úhlopříčky. Tedy Patova cesta EB je shodná s úhlopříčkou EC. Postupně ukážeme, že úsečka EC je shodná s EG a že úsečka AF je shodná s AG. K těmto tvrzením se dopracujeme porovnáním několika úhlů, které si označíme podle následujícího obrázku. V tomto značení zohledňujeme, že trojúhelníky BAE a BEC jsou rovnoramenné, tedy že úhly u jejich základen jsou shodné:



Pětiúhelník sestává ze tří trojúhelníků, tedy součet velikostí vnitřních úhlů pětiúhelníku je $3 \cdot 180° = 540°$. Pravidelný pětiúhelník má všechny vnitřní úhly shodné, tedy velikost vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku je $540° : 5 = 108°$. V našem značení tak dostáváme

$$\alpha = \beta + \gamma = 108°.$$

Součet úhlů v trojúhelníku BAE je $\alpha + 2\beta = 180°$, tedy

$$\beta = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Odtud a z předchozího vyjádření dostáváme

$$\gamma = 108° - 36° = 72°.$$

Součet úhlů v trojúhelníku BEC je $2\gamma + \delta = 180°$, tedy

$$\delta = 180° - 2 \cdot 72° = 36°.$$

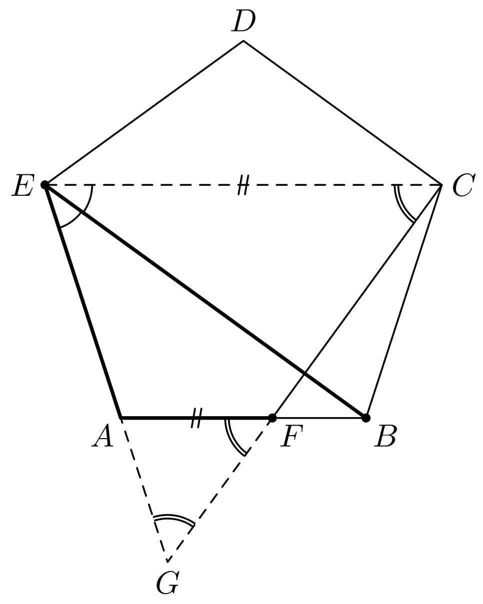
Z uvedeného zejména vyplývá, že úhly BEC a BEG jsou shodné. Navíc úsečky CG a EB jsou podle zadání kolmé, tedy trojúhelník CEG je rovnoramenný s hlavním vrcholem E. Odtud vyplývá, že úsečky EC a EG jsou shodné a stejně tak úhly u základny CG.

Pravidelný pětiúhelník je souměrný (mimo jiné) podle osy úsečky AB, tedy úsečky AB a EC jsou rovnoběžné. Souhlasné úhly ECG a AFG jsou shodné, proto také trojúhelník FAG je rovnoramenný s hlavním vrcholem A. Odtud vyplývá, že úsečky AF a AG jsou shodné.

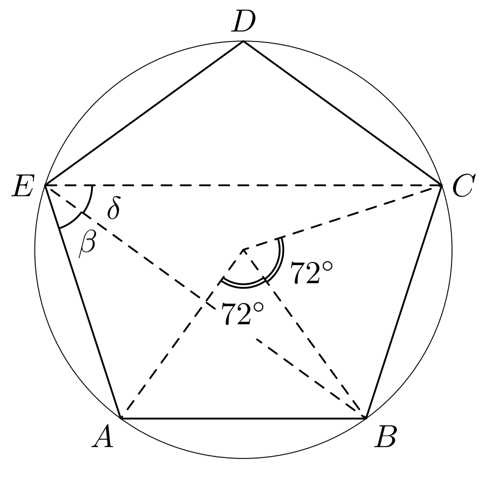
Dohromady dostáváme

$$|EA| + |AF| = |EA| + |AG| = |EG| = |EC| = |EB|,$$

tedy Mat a Pat zametli stejně dlouhé úseky.



Poznámka. Pravidelnému pětiúhelníku lze vždy opsat kružnici. Vzhledem k této kružnici jsou úhly BEC a BEA obvodovými úhly, které přísluší navzájem shodným tětivám BC a BA, a proto jsou shodné. Tento (nesamozřejmý) poznatek může významně zkrátit argumentaci v předchozím řešení. Navíc obvodový úhel je polovinou úhlu středového, který je v našem případě roven $360° : 5 = 72°$. Vzhledem k předchozímu značení tedy vskutku platí $\beta = \delta = 72° : 2 = 36°$.



Z8–I–4

Hynek napsal následující příklad s pěti záhadnými sčítanci:

$$@ + \#\# + *** + \&\&\&\& + \$\$\$\$\$ = ?$$

Prozradil, že znaky @, #, $*$, &, $ představují navzájem různé číslice 1, 2, 3, 4, 5 a že výsledný součet je dělitelný jedenácti.

Které nejmenší a které největší číslo může být výsledkem Hynkova příkladu?

(*E. Novotná*)

Možné řešení. Hynkův příklad můžeme přepsat jako

$$@ + 11 \cdot \# + 111 \cdot * + 1\,111 \cdot \& + 11\,111 \cdot \$ = ?$$

Druhý a čtvrtý sčítanec je dělitelný 11. Koeficient 111 u třetího sčítance a 11 111 u pátého sčítance dává po dělení 11 zbytek 1. Tedy původní součet je dělitelný 11, právě když součet $@ + * + \$$ je dělitelný 11.

Z dostupných čísel lze číslo 11 (či jeho násobek) vyjádřit jedině jako $2 + 4 + 5$. Tedy znaky @, $*$, $ představují čísla 2, 4, 5 v nějakém pořadí. Na znaky # a & zbývají čísla 1 a 3 v nějakém pořadí.

Nejmenší součet dostaneme, pokud znakům $, &, $*$, #, @ po řadě přiřadíme nejmenší možná čísla v rámci předchozích omezení:

$$5 + 33 + 444 + 1\,111 + 22\,222 = 23\,815. \tag{1}$$

Největší součet dostaneme, pokud znakům $, &, $*$, #, @ po řadě přiřadíme největší možná čísla v rámci předchozích omezení:

$$2 + 11 + 444 + 3\,333 + 55\,555 = 59\,345. \tag{2}$$

Výsledkem Hynkova příkladu může být nejméně 23 815 a nejvýše 59 345.

Poznámka. Počet možností, jak pěti znakům přiřadit pět číslic, je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. I bez úvodních postřehů lze určit nejmenší a největší součet, aniž by se musely probírat všechny možnosti. Např. největší možný součet, který lze z daných číslic obdržet bez nároku na dělitelnost 11, odpovídá přiřazení $\$ = 5$, $\& = 4$, $* = 3$, $\# = 2$, $@ = 1$, což zkráceně zapíšeme jako $(5, 4, 3, 2, 1)$. Možné součty sestupně odpovídají přiřazením

$$(5,4,3,2,1),\quad (5,4,3,1,2),\quad (5,4,2,3,1),\quad (5,4,2,1,3),\quad (5,4,1,3,2),\quad (5,4,1,2,3),$$
$$(5,3,4,2,1),\quad (5,3,4,1,2),\quad (5,3,2,4,1),\quad (5,3,2,1,4),\quad \dots$$

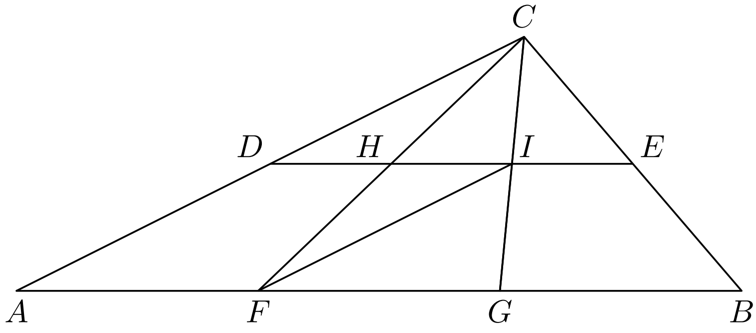
Postupným výpočtem odpovídajících součtů a ověřením jejich dělitelnosti 11 lze odhalit největší vyhovující možnost. Řešení (2) odpovídá 8. možnosti v této posloupnosti.

Při hledání nejmenšího možného Hynkova součtu lze postupovat obdobně, počínaje přiřazením $(1, 2, 3, 4, 5)$. Řešení (1) odpovídá 27. možnosti v příslušné posloupnosti.

Z8–I–5

Trojúhelník ABC je rozdělen úsečkami jako na obrázku. Úsečky DE a AB jsou rovnoběžné. Trojúhelníky CDH, CHI, CIE, FIH mají stejný obsah, a to $8\,\mathrm{dm}^2$.

Určete obsah čtyřúhelníku $AFHD$. (*E. Semerádová*)



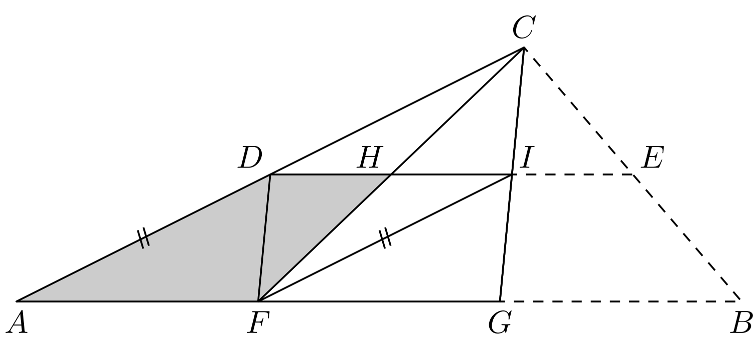
Možné řešení. Trojúhelníky CDH a CHI mají společnou stranu CH, tedy mají stejnou výšku ze společného vrcholu C. Tyto trojúhelníky mají stejný obsah, tedy úsečky DH a HI jsou shodné. Trojúhelníky CHI a FIH mají společnou stranu HI, tedy mají stejnou výšku ze společného vrcholu I. Tyto trojúhelníky mají stejný obsah, tedy úsečky CH a HF jsou shodné.

Předchozí závěry znamenají, že H je středem úseček DI a CF, což jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $CDFI$. Tento čtyřúhelník je tedy rovnoběžníkem, který je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky se stejným obsahem. Obsah rovnoběžníku $CDFI$ je tedy roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku CDH.

Zejména platí, že přímky AC a FI jsou rovnoběžné, tedy také čtyřúhelník $AFID$ je rovnoběžníkem. Tento rovnoběžník má s rovnoběžníkem $CDFI$ společný trojúhelník DFI, který tvoří polovinu jak prvního, tak druhého rovnoběžníku. Obsah rovnoběžníku $AFID$ je tedy stejný jako obsah rovnoběžníku $CDFI$.

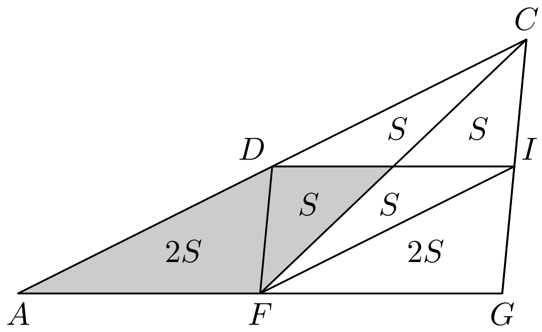
Obsah čtyřúhelníku $AFHD$ můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AFHD} &= S_{AFID} - S_{FIH} = \\ &= S_{CDFI} - S_{CDH} = \\ &= 4 \cdot S_{CDH} - S_{CDH} = 3 \cdot 8 = 24\,(\mathrm{dm}^2). \end{aligned}$$



Poznámky. Čtyřúhelník $AFHD$ je vlastně lichoběžníkem. Body B a E nehrají při řešení úlohy žádnou roli. Z úvodních postřehů vyplývá několik dalších skutečností, které lze použít při řešení úlohy:

Úsečky DI, IF a FD jsou středními příčkami trojúhelníku AGC, a ty rozdělují tento trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. Obsah každého z těchto trojúhelníků je roven dvojnásobku obsahu referenčního trojúhelníku CDH (na obrázku vyznačeno jako S). Tedy $S_{AFHD} = 3 \cdot S_{CDH}$.



Trojúhelníky CDH a CAF jsou podobné s koeficientem 2. Obsah trojúhelníku CAF je proto čtyřnásobkem obsahu trojúhelníku CDH. Tedy $S_{AFHD} = S_{CAF} - S_{CDH} = 3 \cdot S_{CDH}$.

Z8–I–6

Adam vepsal do tabulky 3×3 čísla od 1 po 9 jako na obrázku:

7	6	4
1	2	8
9	3	5

Pro toto vyplnění platí, že součet čísel tří políček podél každé strany je stále stejný. Adam zjistil, že čísla do tabulky lze vyplnit i jinak, aniž by pokazil vlastnost se stejnými součty podél stran.

Jakou nejmenší hodnotu může mít tento součet? Uveďte příklad tabulky s nejmenším součtem podél stran a vysvětlete, proč menší být nemůže. (*J. Tkadlec*)

Možné řešení. Vzhledem k tomu, že každé rohové políčko vystupuje ve dvou součtech, snažíme se do těchto políček umístit nejmenší možná čísla a nějak doplnit zbytek. Po chvíli zkoušení lze odhalit např. následující vyplnění, v němž je součet čísel podél každé strany roven 12:

1	9	2
8	7	6
3	5	4

Vyplnění s menšími součty se najít nedaří, a to proto, že to není možné. Nejmenší možný součet podél strany se sčítancem 9 je $1 + 2 + 9 = 12$. Tedy číslo 9 by muselo být uprostřed tabulky a zbylá čísla podél stran. Nejmenší možný součet podél strany se sčítancem 8 je $1 + 2 + 8 = 11$. Tedy menšího součtu dosáhnout nelze a přemýšlíme nad doplněním tabulky, podél jejíž jedné strany jsou čísla 1, 2 a 8. Podél protilehlé strany by byla tři ze zbývajících pěti čísel. Nejmenší možná čísla jsou 3, 4 a 5, jejichž součet je však $3 + 4 + 5 = 12$ a nikoli 11.

Nejmenší možná hodnota součtu v Adamově tabulce je 12.

Poznámka. Každé ze čtyř rohových políček přispívá do dvou součtů, každé ze zbylých čtyř políček podél stran přispívá do jednoho součtu. Tedy součet všech čtyř součtů podél stran je alespoň

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + 8) = 46.$$

Požadavek rovnosti součtů podél stran znamená, že předchozí součet by musel být dělitelný čtyřmi. Nejbližší větší číslo dělitelné čtyřmi je 48. Tedy nejmenší možná hodnota součtu v Adamově tabulce je $48 : 4 = 12$. Výše uvedená tabulka ukazuje, že takové vyplnění je možné.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

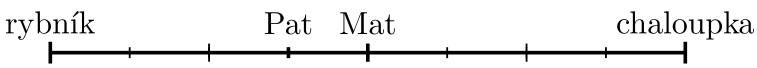
Pat a Mat se vykoupali v rybníce a pak si dali závod do své chaloupky. V jistém okamžiku platilo, že kdyby Mat měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběl by mu do chaloupky trojnásobek oné poloviční vzdálenosti. V tomtéž okamžiku platilo, že kdyby Pat měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl, chyběla by mu do chaloupky třetina oné dvojnásobné vzdálenosti.

Kdo byl v daném okamžiku blíž chaloupce? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Pokud by Matovi do chaloupky chyběl trojnásobek uběhnuté vzdálenosti, pak by byl ve čtvrtině. Tento případ by nastal, kdyby měl zdolánu polovinu vzdálenosti, kterou dosud uběhl. Tedy Mat se v daném okamžiku nacházel v polovině mezi rybníkem a chaloupkou.

Pokud by Patovi do chaloupky chyběla třetina uběhnuté vzdálenosti, pak by byl ve třech čtvrtinách. Tento případ by nastal, kdyby měl zdolán dvojnásobek vzdálenosti, kterou dosud uběhl. Tedy Pat se v daném okamžiku nacházel ve třech osminách mezi rybníkem a chaloupkou.

V daném okamžiku byl blíž chaloupce Mat.



Poznámky. Pokud m a p po řadě značí Matovu a Patovu vzdálenost od rybníka v daném okamžiku a c značí celou vzdálenost mezi rybníkem a chaloupkou, potom informace ze zadání doslovně zapíšeme takto:

$$\frac{1}{2}m + 3\left(\frac{1}{2}m\right) = c, \quad 2p + \frac{1}{3}(2p) = c.$$

Odtud jednoduše dostáváme $2m = c$, tedy $m = \frac{1}{2}c$, a $\frac{8}{3}p = c$, tedy $p = \frac{3}{8}c$.

Z9–I–2

Sestrojte kosočtverec $ABCD$, ve kterém platí $|AC| = 8\,\text{cm}$ a $|AS| = 7\,\text{cm}$, kde S je středem strany CD. (*K. Pazourek*)

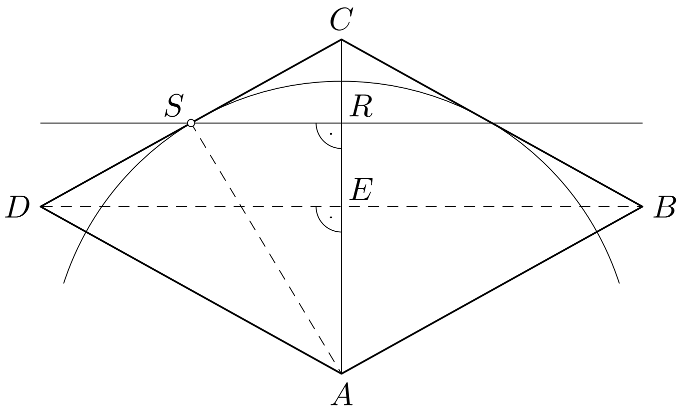
Možné řešení. Využijeme toho, že úhlopříčky v rovnoběžníku se navzájem půlí a v kosočtverci jsou navíc kolmé.

Označme průsečík úhlopříček AC a BD jako E a střed úsečky EC jako R. Úsečka SR je střední příčkou trojúhelníku DEC, která je rovnoběžná se stranou DE. Úsečka SR je proto kolmá na AC. V pravoúhlém trojúhelníku ARS známe velikost přepony $|AS| = 7\,\text{cm}$ a velikost odvěsny $|AR| = \frac{3}{4}|AC| = 6\,\text{cm}$. Vzhledem k tomu, že $7 > 6$, takový trojúhelník opravdu existuje a lze sestrojit např. takto:

- úsečka AR s velikostí 6 cm,
- kolmice k úsečce AR jdoucí bodem R,
- kružnice se středem v bodě A a poloměrem 7 cm,
- bod S je průsečíkem kolmice a kružnice.

Zbylé vrcholy kosočtverce, lze sestrojit následovně:

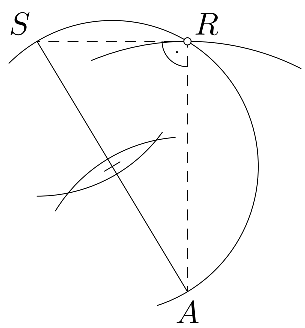
- bod C leží na polopřímce AR ve vzdálenosti 8 cm od A,
- bod D je středově souměrný s bodem C podle středu S,
- bod B je osově souměrný s bodem D podle osy AC.



Poznámky. Hlavní pozornost věnujeme konstrukci trojúhelníku ARS. Konstrukce souměrných bodů D a B pokládáme za dobře známé, tedy detailně nerozepisujeme. Průsečíky ve čtvrtém kroku konstrukce jsou dva; druhá možnost vede k témuž řešení s jinak označenými vrcholy.

Dílčí konstrukce lze realizovat různě. Např. pro danou úsečku AC lze body E a R po řadě sestrojit jako středy úseček AC a EC, bod D lze sestrojit jako průsečík přímky CS s kolmicí k AC jdoucí bodem E, apod. Pravoúhlý trojúhelník ARS je možné sestrojit také takto:

- úsečka AS s velikostí 7 cm,
- kružnice se středem v bodě A a poloměrem 6 cm,
- kružnice s průměrem AS,
- bod R je průsečíkem kružnic.



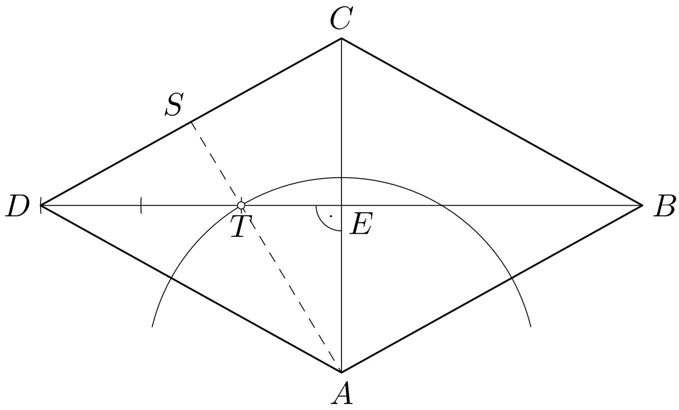
Podle Thaletovy věty je úhel u vrcholu R vskutku pravý.

Trojúhelníky ACB a ACD vypadají téměř rovnostranně, ale nejsou. Zejména neplatí, že se kružnice v prvním obrázku dotýká úsečky CD, i když to tak může vypadat.

Jiné řešení. Využijeme toho, že úsečky AS a DE jsou těžnicemi trojúhelníku ACD. Navíc si uvědomujeme, že úhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem kolmé.

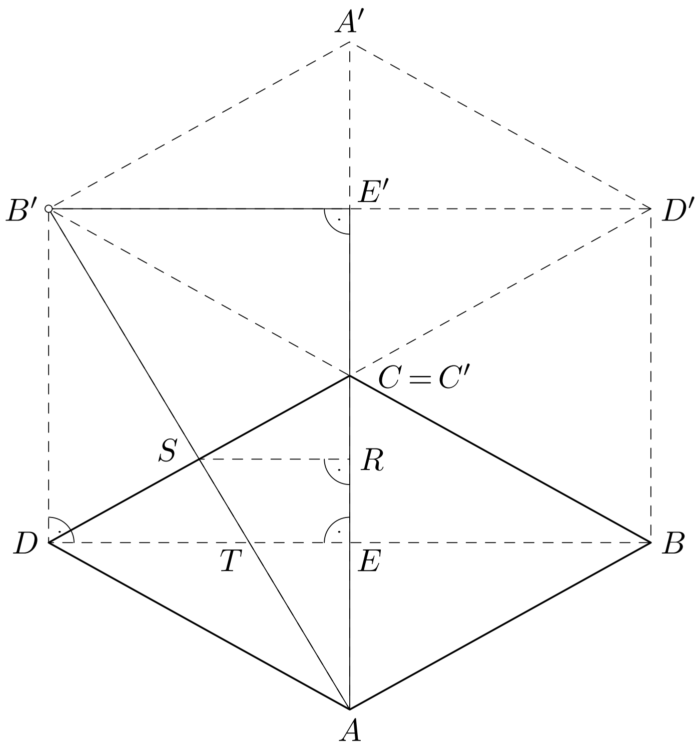
Označme průsečík úhlopříček AC a BD jako E a průsečík těžnic AS a DE, tj. těžiště, jako T. Těžiště leží ve třetině každé těžnice, blíže straně trojúhelníku. V pravoúhlém trojúhelníku AET tedy známe velikost přepony $|AT| = \frac{2}{3}|AS| = \frac{14}{3}$ cm a velikost odvěsny $|AE| = \frac{1}{2}|AC| = 4$ cm. Vzhledem k tomu, že $\frac{14}{3} > 4$, trojúhelník AET opravdu existuje a lze sestrojit podobně jako trojúhelník ARS v řešení uvedeném výše. Zbylé vrcholy kosočtverce, lze sestrojit např. takto:

- bod D leží na polopřímce ET ve vzdálenosti $3|ET|$ od E,
- bod B je středově souměrný s bodem D podle středu E,
- bod C je středově souměrný s bodem A podle středu E.



Poznámky. V uvedeném řešení je zapotřebí rozdělit danou úsečku na třetiny. Korektní řešení tohoto podúkolu pokládáme za dobře známé, tedy detailně nerozepisujeme.

Předchozí poznámka souvisí s faktem, že trojúhelníky AET a ARS jsou podobné s koeficientem podobnosti 2/3. Vhodným rozšířením diskutovaného útvaru lze objevit další vztahy a na nich založit alternativní konstrukce. Pokud body A', B', D', E' značí po řadě body souměrné s A, B, D, E podle středu C, potom např. čtyřúhelník $ACB'D$ je rovnoběžníkem, čtyřúhelník $DEE'B'$ je obdélníkem, trojúhelník $AE'B'$ je podobný s trojúhelníkem ARS (tedy i AET) apod.



Z9–I–3

V základní škole U Tří dubů, kam chodí i Zikmund, každoročně pořádají vědomostní soutěž, v níž každý soutěžící může získat nejvíce 15 bodů. Letos byl průměrný bodový zisk soutěžících zaokrouhlený na desetiny roven 10,4. Zikmund si po soutěži uvědomil, že jednu otázku si špatně přečetl a odpovídal na něco jiného. Mohl tak mít o 4 body více a průměrný bodový zisk zaokrouhlený na desetiny by se tím zvýšil na 10,6.

Určete, kolik nejméně a kolik nejvíce dětí letos U tří dubů soutěžilo. (*M. Petrová*)

Možné řešení. Pracujeme se zaokrouhlenými čísly, tedy skutečný průměrný bodový zisk mohl být v rozmezí od 10,35 včetně po 10,45 vyjma (toto číslo se již zaokrouhluje na 10,5). Pokud n značí počet účastníků soutěže a c celkový součet bodů získaných všemi soutěžícími, potom předchozí podmínku zapíšeme takto:

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{n} < 10{,}45. \tag{1}$$

Obdobnou úvahou zjišťujeme, že další podmínka ze zadání znamená:

$$10{,}55 \leqq \frac{c+4}{n} < 10{,}65. \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{c+4}{n} = \frac{c}{n} + \frac{4}{n}$ a že sčítanec $\frac{c}{n}$ je omezen v (1), z podmínky (2) postupně dostáváme:

$$10{,}55 - \frac{c}{n} \leqq \frac{4}{n} < 10{,}65 - \frac{c}{n},$$

$$0{,}1 < \frac{4}{n} < 0{,}3. \tag{3}$$

Dalšími ekvivalentními úpravami najdeme omezení pro n:

$$10 > \frac{n}{4} > \frac{10}{3},$$
$$40 > n > \frac{40}{3}.$$

Těmto omezením vyhovují všechna přirozená čísla od 14 do 39.

Soutěže se zúčastnilo nejméně 14 a nejvíce 39 dětí.

Poznámky. Všimněte si, že v omezeních (3) jsou obě nerovnosti ostré: pro spodní odhad odečítáme od 10,55 největší možnou hodnotu $\frac{c}{n}$, a ta je ostře menší než 10,45; pro horní odhad odečítáme od hodnoty ostře menší než 10,65 nejmenší možnou hodnotu $\frac{c}{n}$, a ta je 10,35. Informace o maximálním počtu bodů, které může získat každý soutěžící, je nadbytečná.

Náznak jiného řešení. K možným počtům soutěžících se lze dopracovat i zkoušením možností. Za předpokladu, že hodnoty průměrných bodových zisků jsou přesné, by podmínky (1) a (2) byly nahrazeny rovnostmi

$$\frac{c}{n} = 10{,}4, \qquad \frac{c+4}{n} = 10{,}6.$$

Dosazením první rovnosti do druhé a úpravou dostáváme $\frac{4}{n} = 0{,}2$, tedy $n = 20$. To je vyhovující počet soutěžících a ostatní vyhovující možnosti lze najít zkoušením okolních čísel a ověřováním podmínek ze zadání. Není nutné postupovat úplně systematicky, stačí najít mezní hodnoty, pro které podmínky platí, ale pro následovníka, resp. předchůdce neplatí. Např. ověření pro horní omezení počtu soutěžících vypadá následovně:

- Podmínka (1) pro $n = 39$ a její postupné úpravy dávají

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{39} < 10{,}45,$$
$$403{,}65 \leqq c < 407{,}55,$$
$$407{,}65 \leqq c + 4 < 411{,}55,$$
$$10{,}4525541 \leqq \frac{c+4}{39} < 10{,}5525641.$$

  Tato omezení nejsou ve sporu s omezeními (2), pouze je zpřesňují. Tedy počet soutěžících mohl být 39.

- Podmínka (1) pro $n = 40$ a její postupné úpravy dávají

$$10{,}35 \leqq \frac{c}{40} < 10{,}45,$$
$$414 \leqq c < 418,$$
$$418 \leqq c + 4 < 422,$$
$$10{,}45 \leqq \frac{c+4}{40} < 10{,}55.$$

  Tato omezení jsou ve sporu s omezeními (2) — žádné číslo není ostře menší než 10,55 a současně větší nebo rovno 10,55. Tedy počet soutěžících nemohl být 40.

Z9–I–4

Kája měl vynásobit dvě dvojmístná čísla. Z nepozornosti zaměnil pořadí číslic v jednom z činitelů a dostal součin, který byl o 4 248 menší než správný výsledek.

Kolik mělo Kájovi správně vyjít? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme x a y Kájova dvojmístná čísla a dejme tomu, že číslice zaměnil v prvním čísle. Pokud číslice čísla x označíme a a b, potom platí

$$(10a + b)y - (10b + a)y = 4248.$$

Po úpravě dostáváme $9(a - b)y = 4248$ neboli $(a - b)y = 472$. Odtud vyplývá, že číslo y je dvojmístným dělitelem čísla 472.

Prvočíselný rozklad čísla 472 je $472 = 2^3 \cdot 59$, tedy jeho jediným dvojmístným dělitelem je 59. To znamená, že $a - b = 8$. Této podmínce vyhovují následující dvě možnosti:

- $a = 8$, $b = 0$, tedy $(10a + b)y = 80 \cdot 59 = 4720$,
- $a = 9$, $b = 1$, tedy $(10a + b)y = 91 \cdot 59 = 5369$.

Kájovi mělo správně vyjít buď 4720, nebo 5369.

Poznámka. Při záměně číslic v prvním případě dostáváme 08. To sice dává vyhovující řešení ($80 \cdot 59 - 8 \cdot 59 = 4248$), ale nejedná se o dvojmístné číslo. Nechce se věřit, že by si Kája tohoto faktu i při své nepozornosti nevšiml. Vyloučení této možnosti proto nepovažujeme za chybu.

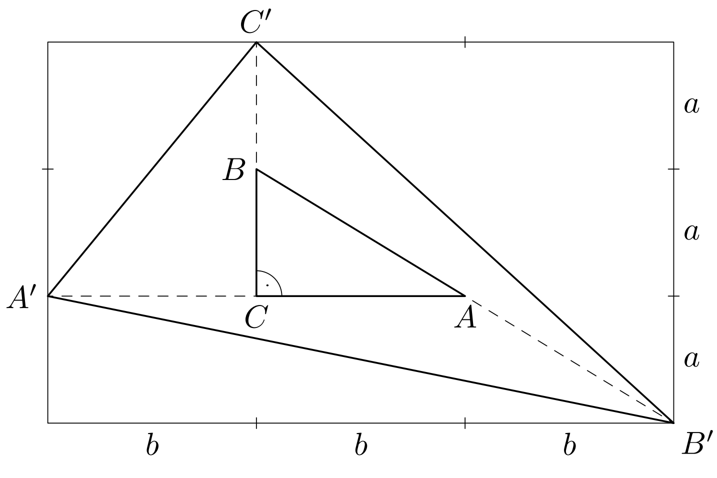
Z9–I–5

Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Body A', B', C' jsou obrazy bodů A, B, C postupně ve středových souměrnostech se středy C, A, B. Dokažte, že platí

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

(*J. Zhouf*)

Možné řešení. Vzhledem ke směrům odvěsen trojúhelníku ABC opíšeme trojúhelníku $A'B'C'$ obdélník jako na následujícím obrázku. Při obvyklém značení $a = |BC|$ a $b = |AC|$ mají strany tohoto obdélníku velikosti $3a$ a $3b$:



Každá ze stran trojúhelníku $A'B'C'$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož hlavní vrchol leží v některém z vrcholů opsaného obdélníku. Podle Pythagorovy věty tak postupně odvozujeme, že

$$\begin{aligned}|A'B'|^2 &= a^2 + (3b)^2 = a^2 + 9b^2,\\ |B'C'|^2 &= (3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2,\\ |A'C'|^2 &= (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Součtem těchto tří vyjádření a s pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC vskutku dostáváme

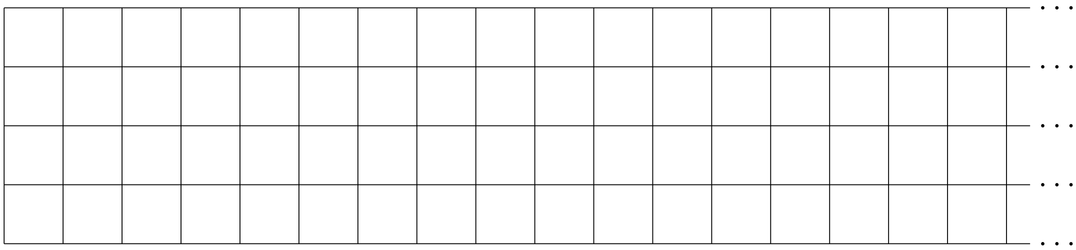
$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14a^2 + 14b^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$

Z9–I–6

Níže je naznačena část čtvercové sítě sestávající ze 4 řádků a 2023 sloupců.

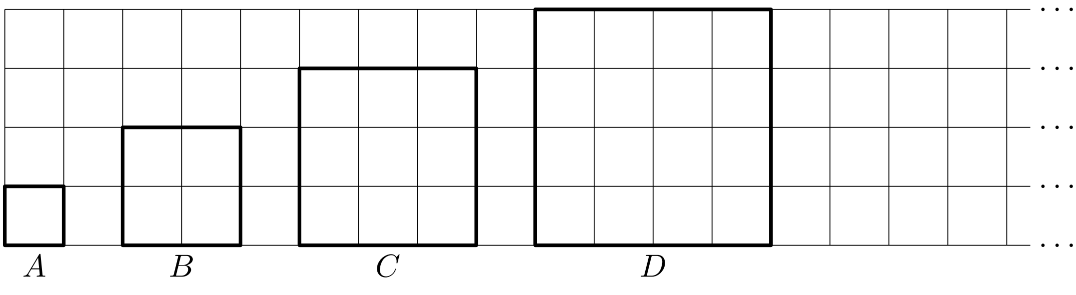
Určete počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body čtvercové sítě.

(*K. Pazourek*)

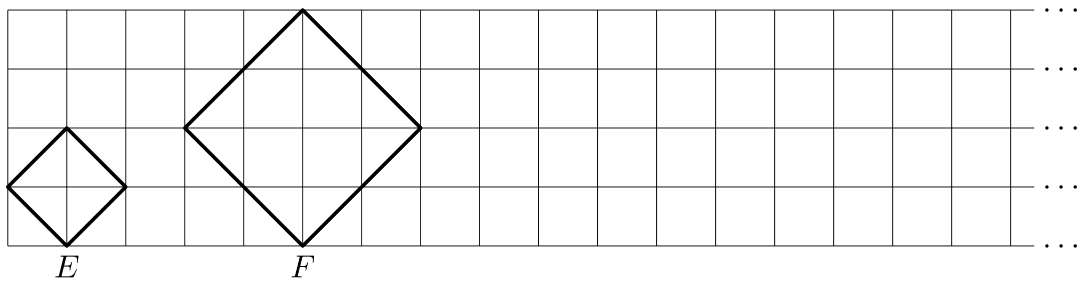


Možné řešení. Nejmenší čtverec s vrcholy v uzlových bodech má rozměry 1×1, největší má rozměry 4×4. V rámci těchto omezení najdeme další případy, které rozlišíme následovně.

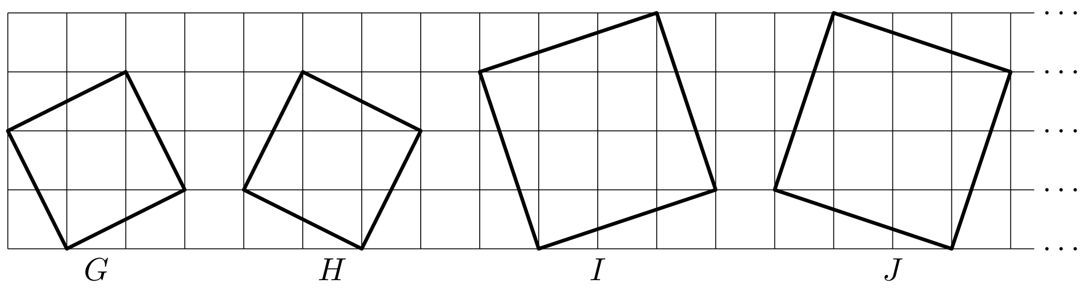
- Čtverce se stranami rovnoběžnými vzhledem k síti:



- Čtverce se stranami úhlopříčnými vzhledem k síti:



- Ostatní čtverce:



Pro vlastní počítání čtverců jistého typu není podstatné jejich natočení, ale pouze kolik jednotek zabírají ve vodorovném a svislém směru. Tedy čtverců typu B je v síti stejný počet jako čtverců typu E. Čtverců typu C je v síti stejný počet jako čtverců typu G, resp. H. Čtverců typu D je v síti stejný počet jako čtverců typu F, což je stejně jako čtverců typu I, resp. J.

Stačí tedy spočítat čtverce čtyř typů:

- Čtverec typu A můžeme ve svislém směru umístit čtyřmi způsoby, ve vodorovném směru 2 023 způsoby. Takových čtverců je
$$4 \cdot 2\,023 = 8\,092.$$
- Čtverec typu B (resp. E) můžeme ve svislém směru umístit třemi způsoby, ve vodorovném směru 2 022 způsoby. Takových čtverců je
$$3 \cdot 2\,022 = 6\,066.$$
- Čtverec typu C (resp. G, H) můžeme ve svislém směru umístit dvěma způsoby, ve vodorovném směru 2 021 způsoby. Takových čtverců je
$$2 \cdot 2\,021 = 4\,042.$$
- Čtverec typu D (resp. F, I, J) můžeme ve svislém směru umístit jediným způsobem, ve vodorovném směru 2 020 způsoby. Takových čtverců je
$$1 \cdot 2\,020 = 2\,020.$$

Počet čtverců, jejichž všechny vrcholy jsou uzlovými body sítě, je
$$1 \cdot 8\,092 + 2 \cdot 6\,066 + 3 \cdot 4\,042 + 4 \cdot 2\,020 = 40\,430.$$