# Návody k domácí části I. kola kategorie C

**1.** *Určete všechny dvojice $(x, y)$ reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic*

$$\sqrt{(x+4)^2} = 4 - y,$$
$$\sqrt{(y-4)^2} = x + 8.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:
   a) $|x| = x + 2$ [$x = -1$]
   b) $|2x + 2| = x + 4$ [$x = -2$, $x = 2$]
   c) $|x - 1| = |x| - 1$ [$x \geqq 1$]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
   a) $|x + 2| = y - 1$, $|y - 5| = -x$ [$x = -3$, $y = 2$]
   b) $|x - 1| = y$, $|x - 2| = y + 2$ [soustava nemá řešení]
   c) $|x| = y + 1$, $x = |y| + 1$ [$x \geqq 1$, $y = x - 1$]

**2.** *Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Jaký úhel spolu svírají hodinová a minutová ručička v 1:30 na ciferníku
   a) s 12 čísly, [135°]
   b) s 24 čísly? [157,5°]
2. Na ciferníku s 12 čísly najděte všechny časy, kdy budou hodinová a minutová ručička svírat úhel 120° v intervalu
   a) 0–12 hodin, [$\frac{4}{11}$ h, $2 \cdot \frac{4}{11}$ h, $4 \cdot \frac{4}{11}$ h, $5 \cdot \frac{4}{11}$ h, $7 \cdot \frac{4}{11}$ h, $8 \cdot \frac{4}{11}$ h, $10 \cdot \frac{4}{11}$ h, $11 \cdot \frac{4}{11}$ h, $13 \cdot \frac{4}{11}$ h, $14 \cdot \frac{4}{11}$ h, $16 \cdot \frac{4}{11}$ h, $17 \cdot \frac{4}{11}$ h, $19 \cdot \frac{4}{11}$ h, $20 \cdot \frac{4}{11}$ h, $22 \cdot \frac{4}{11}$ h, $23 \cdot \frac{4}{11}$ h, $25 \cdot \frac{4}{11}$ h, $26 \cdot \frac{4}{11}$ h, $28 \cdot \frac{4}{11}$ h, $29 \cdot \frac{4}{11}$ h, $31 \cdot \frac{4}{11}$ h, $32 \cdot \frac{4}{11}$ h]
   b) 0–$\infty$ hodin. [$(3n + 1) \cdot \frac{4}{11}$ h, $(3n + 2) \cdot \frac{4}{11}$ h, $n = 0, 1, 2, \ldots$]

**3.** *Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo $k$ takové, že $0 \leqq k \leqq 64$, vybere Simona $k$ políček šachovnice $8 \times 8$ a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na $k$ určete, která z dívek má vyhrávající strategii.*

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Řešte danou úlohu pro šachovnice $2 \times 2$ a $4 \times 4$.
2. Jak se změní výsledek dané úlohy, budeme-li místo dvou křížků pod kostkou uvažovat podmínku, že pod kostkou není ani jeden křížek?

3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo $k$ takové, že $0 \leqq k \leqq 9$, vybere Simona $k$ políček šachovnice $3\times3$ a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatní políčka napíše číslo 0. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem pokryje třemi triminovými kostkami, tj. kostkami tvaru $3\times1$, a čísla pod jejími políčky vynásobí. Je-li počet kostek se součinem 0 lichý, vyhrává Simona, jinak vyhrává Lenka. V závislosti na $k$ určete, kolikaprocentní vítěznou strategii má Simona. [80%]

**4.** *Označme $E$ střed základny $AB$ lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka $AC$ protíná úsečky $ED$, $BD$ po řadě v bodech $F$, $G$. Určete postupný poměr*

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Lichoběžník $ABCD$ má základny o délkách $|AB| = a$, $|CD| = c$, jeho úhlopříčky se protínají v bodě $U$.
   a) Dokažte, že trojúhelníky $ABU$ a $CDU$ jsou podobné a určete poměr podobnosti. Jaký je poměr obsahů těchto trojúhelníků? $[a^2 : c^2]$
   b) Dokažte, že obsahy trojúhelníků $ADU$ a $BCU$ jsou stejné.
2. Je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$. Určete $a : b : c : d$. $[15 : 30 : 40 : 48]$

**5.** *Rozdíl dvou přirozených čísel je 2 010 a jejich největší společný dělitel je 2 014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechny dělitele čísla 2 014. $[1, 2, 19, 38, 53, 106, 1\,007, 2\,014]$
2. Rozdíl dvou přirozených čísel je 5 a jejich největší společný dělitel je 6krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete obě takové dvojice čísel.
3. Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $a$, $b$ a jejich největšího společného dělitele $D$ a jejich nejmenší společný násobek $n$ platí $ab = nD$.
4. Platí pro každá tři přirozená čísla $a, b, c$ a jejich největšího společného dělitele $D$ a jejich nejmenší společný násobek $n$ rovnost $abc = nD$?
5. Mají-li přirozená čísla $a$, $b$ největšího společného dělitele $D$, mají stejného největšího společného dělitele i čísla $a$, $b$, $a-b$, $a+b$. Dokažte. Platí stejné tvrzení pro nejmenší společný násobek?

**6.** *Najděte nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že v zápise čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.*

Návodné a doplňující úlohy:

1. Není-li přirozené číslo $n$ druhou mocninou jiného přirozeného čísla, dokažte, že $\sqrt{n}$ je číslo iracionální.
2. Najděte pomocí kalkulačky nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka. $[\sqrt{35} = 5{,}916\,079\ldots]$
3. Najděte všechna přirozená čísla $n$ taková, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka.
4. Najděte nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě nuly. $[\sqrt{2\,501} = 50{,}009\,999\ldots]$

5. Najděte nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě stejné cifry. [na kalkulačce $\sqrt{43} = 6{,}557\,438\ldots$]