Česko-polsko-slovenské střetnutí

IST Austria, 23. – 26. června 2019

(První den – 24. června 2019)

1. Je dána kružnice ω. Body A, B, C, X, D, Y leží na ω v tomto pořadí tak, že BD je její průměr a $|DX| = |DY| = |DP|$, kde P je průsečík AC a BD. Označme E, F postupně průsečíky přímky XP s přímkami AB, BC. Dokažte, že body B, E, F, Y leží na jedné kružnici.

2. Uvažujme kladná celá čísla n, která mají alespoň šest kladných dělitelů. Uspořádejme kladné dělitele n do posloupnosti $(d_i)_{1\le i\le k}$ tak, že

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n \quad (k \ge 6).$$

Najděte všechna kladná celá čísla n splňující

$$n = d_5^2 + d_6^2.$$

3. Řekneme, že rozdělení konvexního mnohoúhelníku na konečně mnoho trojúhelníků pomocí úseček je *trilaterace*, jestliže žádné tři vrcholy těchto trojúhelníků neleží na jedné přímce (vrcholy některých těchto trojúhelníků mohou ležet uvnitř mnohoúhelníku). Řekneme, že trilaterace je *dobrá*, jestliže její úsečky mohou být nahrazeny jednosměrnými šipkami tak, aby šipky podél každého trojúhelníku tvořily cyklus a šipky podél celého konvexního mnohoúhelníku také tvořily cyklus. Nalezněte všechna $n \ge 3$, pro která má pravidelný n-úhelník dobrou trilateraci.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech

Česko-polsko-slovenské střetnutí

IST Austria, 23. – 26. června 2019

(Druhý den – 25. června 2019)

4. Je dáno reálné číslo α. Nalezněte všechny dvojice (f, g) funkcí $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$xf(x+y) + \alpha \cdot yf(x-y) = g(x) + g(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Rozhodněte, zda lze v rovině rozmístit 100 kruhů $D_2, D_3, \ldots, D_{101}$ tak, že následující podmínky jsou splněny pro všechny dvojice indexů (a, b) splňujících $2 \le a < b \le 101$:

1. Je-li $a \mid b$, pak D_a je obsažen v D_b.
2. Je-li $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$, pak D_a a D_b jsou disjunktní.

(Kruh $D(O, r)$ je množina bodů v rovině, jejichž vzdálenost od daného bodu O nepřevyšuje dané kladné reálné číslo r.)

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC splňující $AB < AC$ a $|\angle BAC| = 60^\circ$. Označme AD, BE, CF jeho výšky a H jeho průsečík výšek. Dále označme K, L, M postupně středy stran BC, CA, AB. Dokažte, že středy úseček AH, DK, EL, FM leží na jedné kružnici.

Čas: 4 hodiny a 30 minut.
Za každou úlohu lze získat 7 bodů.

Language: Czech