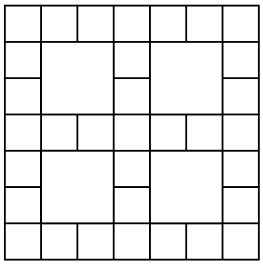
64. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Určete počet cest délky 14, které vedou po hranách sítě na obrázku z bodu A do bodu B. Délka každé hrany je jedna.



2. Je dán rovnoběžník $ABCD$, přičemž $|AB| = 2|BC|$. Určete všechny přímky, které dělí daný rovnoběžník na dva tečnové čtyřúhelníky.

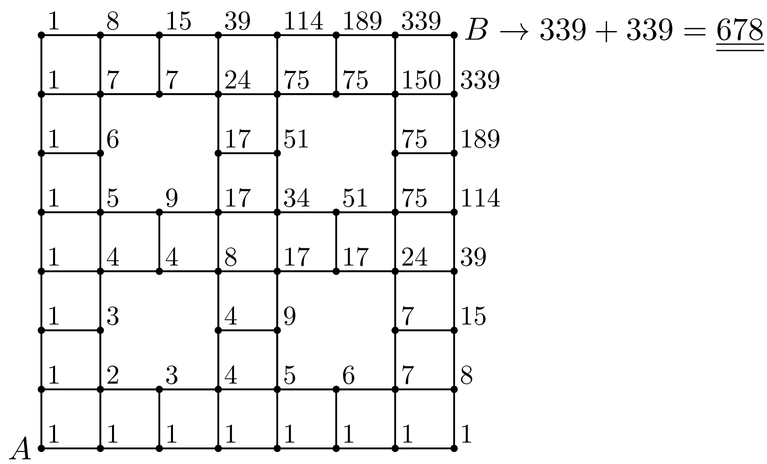
3. Určete všechny dvojice (p, q) celých čísel takových, že p je celočíselným násobkem čísla q a kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má alespoň jeden celočíselný kořen.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 9. prosince 2014

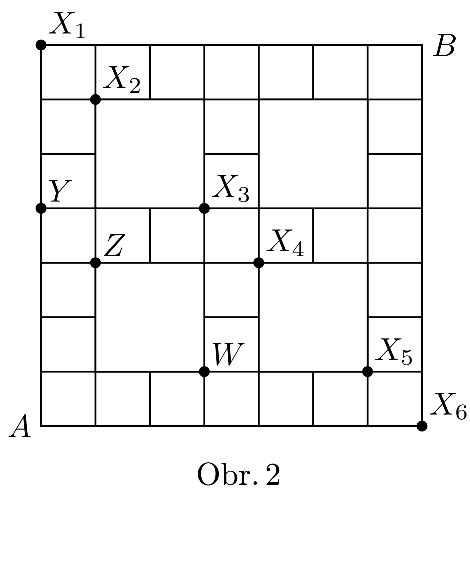
tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Každá cesta z bodu A do bodu B délky 14 se nutně skládá ze sedmi hran směrem doprava a sedmi hran směrem nahoru. Postupně zleva doprava a zdola nahoru připíšeme ke každému bodu sítě, kolik cest z bodu A složených z hran vedoucích vzhůru a doprava do něj vede (obr. 1). Pokud se dá do některého bodu přijít jen z jednoho směru, bude počet cest stejný jako počet cest vedoucích do bodu, z kterého přicházíme. Pokud se dá přijít ze dvou směrů, bude počet cest součtem počtů cest vedoucích do bodů, z nichž můžeme přijít. Takto umíme vyplnit celou síť. Hledaný počet cest se rovná číslu, které na konci připíšeme k bodu B. (Při vyplňování můžeme využít osovou souměrnost podle přímky AB, a ušetřit si tak část práce.)



Obr. 1

Jiné řešení. Pro snadnější vyjadřování označme některé body sítě jako na obr. 2. Každá cesta z bodu A do bodu B délky 14 se skládá ze sedmi hran směrem doprava a sedmi hran směrem nahoru. Úhlopříčku X_1X_6 tak musí přetnout právě jednou, a to v jednom z šesti bodů $X_1, \ldots, X_6$. Pro každý z nich spočítáme, kolik cest jím vede. V dalším textu budeme pod pojmem „cesta“ rozumět pouze trasy složené z hran směrem doprava a nahoru.



Obr. 2

Vzhledem k tomu, že síť je osově souměrná podle přímky X_1X_6, je obrazem každé cesty z A do X_i pro každé $i = 1, 2, \ldots, 6$ v této osové souměrnosti cesta z X_i do B a naopak. Počet cest z A do X_i je proto roven počtu cest z X_i do B. Jelikož každou cestu z A do X_i můžeme zkombinovat s libovolnou cestou z X_i do B, je celkový počet cest z A do B vedoucí bodem X_i roven druhé mocnině počtu cest z A do X_i. Stačí tedy určit počet cest z A do X_i pro každé $i = 1, 2, \ldots, 6$ a tato čísla umocnit na druhou a sečíst:

- Do bodu X_1 vede z A jediná cesta složená ze sedmi hran nahoru.
- Do bodu X_2 vede z A celkem 7 cest — právě jedna ze sedmi hran musí vést doprava a může to být kterákoli v jejich pořadí na cestě.
- Do bodu X_3 se dá z A dostat jedině některým (právě jedním) z bodů Y, Z, W:
  - ▷ Bodem Y vede jediná cesta.
  - ▷ Do bodu Z vedou z A čtyři cesty (jedna ze čtyř hran je doprava), z bodu Z do X_3 vedou tři cesty (jedna ze tří hran je nahoru). Bodem Z do bodu X_3 tak můžeme projít $4 \cdot 3 = 12$ způsoby.
  - ▷ Do bodu W vedou z A čtyři cesty (jedna ze čtyř hran je nahoru), z bodu W do X_3 vede jediná cesta. Bodem W proto vedou čtyři cesty.

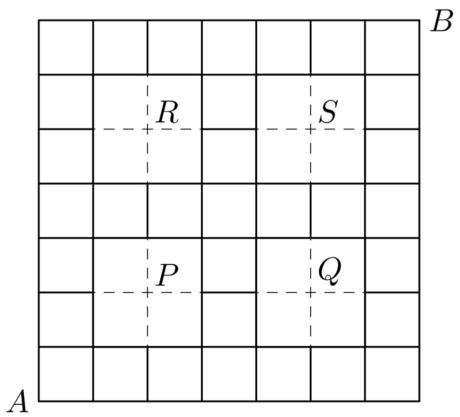
  Z A do X_3 tedy vede celkem $1 + 12 + 4 = 17$ cest.

Jelikož síť je osově souměrná i podle přímky AB, do bodů X_4, X_5, X_6 vede z A postupně stejný počet cest jako do bodů X_3, X_2, X_1. Vzhledem k uvedenému je celkový počet cest z A do B roven

$$1^2 + 7^2 + 17^2 + 17^2 + 7^2 + 1^2 = (1 + 49 + 289) \cdot 2 = 678.$$

Jiné řešení. Uveďme nejdříve známé pomocné tvrzení: *Pokud je síť „kompletní“ a má šířku m a výšku n, je počet cest délky $m+n$ vedoucích z levého dolního do pravého horního rohu roven $\binom{m+n}{m}$.* Každá taková cesta je totiž jednoznačně určena posloupností m nul a n jedniček, v níž nula či jednička na k-tém místě znamená, že v k-tém kroku cesty zahneme doprava či nahoru.

„Cestou“ budeme opět rozumět pouze cesty složené z hran směrem doprava a nahoru. Kdyby byla síť kompletní, vedlo by z A do B celkem $\binom{14}{7} = 3\,432$ cest. Z nich musíme vyloučit ty cesty, které vedou některým z bodů P, Q, R, S (obr. 3). Pro $X \in \{P, Q, R, S\}$ označme M_X množinu všech cest z A do B vedoucích zvoleným bodem X. Počet takových cest je zřejmě roven součinu počtu cest z A do X a počtu cest z X do B.



Obr. 3

Z uvedeného vzhledem ke zřejmé symetrii bodů P, S a bodů R, Q dostáváme

$$|\mathsf{M}_P| = |\mathsf{M}_S| = \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{5} = 1\,512, \qquad |\mathsf{M}_R| = |\mathsf{M}_Q| = \binom{7}{5} \cdot \binom{7}{2} = 441,$$

Některé cesty z A do B však procházejí vícero body P, Q, R, S. Abychom vypočítali počet prvků sjednocení množin M_P, M_Q, M_R, M_S, potřebujeme ještě určit počty prvků průniků dvojic a trojic z těchto množin (průnik všech čtyř množin je prázdný, protože žádná cesta nevede současně oběma body R i Q).

Z jednoduchého zobecnění úvahy o počtu cest vedoucích z A do B daným bodem X vyplývá, že počet cest, které vedou z Y_0 postupně body $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k+1}$, je roven součinu počtů cest z Y_i do Y_{i+1} pro $i = 0, 1, \ldots, k$. Pokud tedy označíme $\mathsf{M}_{Y_1 Y_2 \ldots Y_k}$ množinu všech cest vedoucích z A do B postupně body $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, pro počty prvků množin dostaneme (opět využijeme symetrii)

$$|\mathsf{M}_{PQ}| = |\mathsf{M}_{PR}| = |\mathsf{M}_{RS}| = |\mathsf{M}_{QS}| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{7}{2} = 126,$$

$$|\mathsf{M}_{PS}| = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 720, \qquad |\mathsf{M}_{PQS}| = |\mathsf{M}_{PRS}| = \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 36.$$

Ostatní průniky (se zastoupením obou množin M_Q a M_R) jsou prázdné.

Z principu exkluze a inkluze pak plyne

$$\begin{aligned}
&|\mathsf{M}_P \cup \mathsf{M}_Q \cup \mathsf{M}_R \cup \mathsf{M}_S| = |\mathsf{M}_P| + |\mathsf{M}_Q| + |\mathsf{M}_R| + |\mathsf{M}_S| - \\
&- \big(|\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_Q| + |\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_R| + |\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_S| + |\mathsf{M}_Q \cap \mathsf{M}_R| + |\mathsf{M}_Q \cap \mathsf{M}_S| + |\mathsf{M}_R \cap \mathsf{M}_S|\big) + \\
&+ \big(|\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_Q \cap M_R| + |\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_Q \cap M_S| + |\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_R \cap M_S| + |\mathsf{M}_Q \cap \mathsf{M}_R \cap M_S|\big) - \\
&- |\mathsf{M}_P \cap \mathsf{M}_Q \cap M_R \cap \mathsf{M}_S| = \\
&\qquad = 2 \cdot 1\,512 + 2 \cdot 441 - (4 \cdot 126 + 720 + 0) + (2 \cdot 36 + 2 \cdot 0) - 0 = 2\,754.
\end{aligned}$$

Cest z A do B, které nevedou přes žádný z bodů P, Q, R, S, je $3\,432 - 2\,754 = 678$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud žák má správný postup a jen se splete při numerických výpočtech, strhněte 1–2 body.

Pokud žák postupuje jako u prvního řešení, tabulku však nedokončí, udělte 3 body, pokud je z řešení zřejmé, že žák chápe princip vyplňování u „děr“; v opačném případě dejte nejvýše 2 body.

Pokud žák postupuje jako při třetím řešení, ale nesprávně použije princip inkluze a exkluze (např. zapomene na průniky trojic množin), dejte nejvýše 3 body.

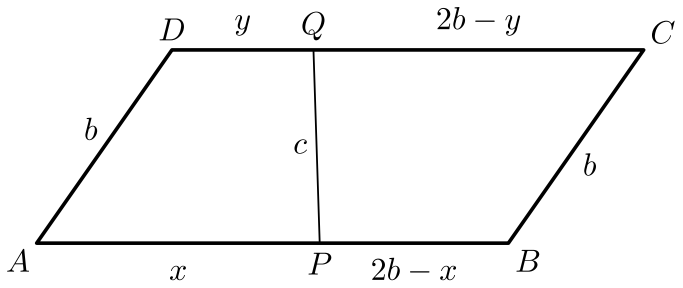
Za práci, v níž jsou uvedeny pouze dílčí výsledky např. z některého zde uvedeného řešení (bez náznaku dalšího postupu), dejte nejvýše 2 body.

2. Při řešení využijeme známé kritérium: *konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součet délek jedné dvojice jeho protějších stran se rovná součtu délek druhé dvojice.*[1]

Má-li přímka dělit rovnoběžník na dva čtyřúhelníky, musí procházet vnitřními body dvou jeho protějších stran. Rozebereme obě možnosti.

Uvažujme nejdříve dělící přímku spojující body P, Q uvnitř stran AB, CD. Označme b délku strany BC a c, x a y postupně délky úseček PQ, AP a DQ (obr. 4,

[1] Jedna implikace jednoduše plyne ze shodnosti úseků tečen z libovolného vrcholu tečnového čtyřúhelníku k vepsané kružnici.



Obr. 4

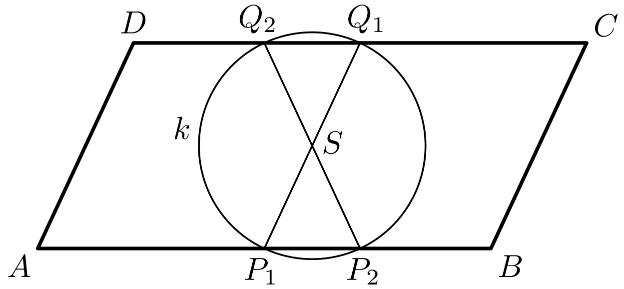
kde jsme při popisu délek využili toho, že $|AB| = 2b$ podle zadání). Předpokládejme, že přímka PQ vyhovuje podmínkám úlohy. Pro tečnové čtyřúhelníky $APQD$ a $BPQC$ pak platí

$$b + c = x + y,$$
$$b + c = (2b - x) + (2b - y) = 4b - (x + y).$$

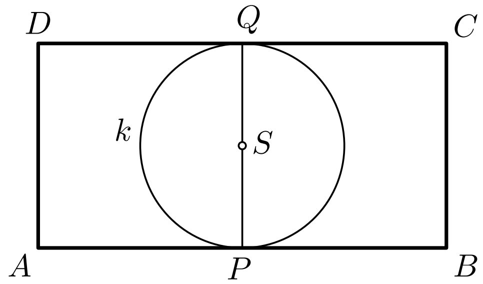
Sečtením obou rovnic dostaneme $2(b + c) = 4b$ neboli $c = b$. Dosazením do první rovnice vyjde $x + y = 2b$ neboli $x = 2b - y$. To znamená, že $|AP| = |CQ|$. V středové souměrnosti podle středu S rovnoběžníku se proto bod P zobrazí do bodu Q, tudíž přímka PQ prochází bodem S; ten je zároveň středem úsečky PQ.

Z výše uvedeného vyplývá, že body P, Q leží na kružnici $k(S; \frac{1}{2}b)$. Její průsečíky se stranami AB a CD daného rovnoběžníku (souměrně sdružené podle středu S) určují polohu bodů P a Q, tedy hledanou přímku PQ. Přitom pro každou takto nalezenou přímku PQ procházející bodem S platí $|PQ| = b$ a $|AP| + |QD| = |AP| + |PB| = |AB| = 2b = |AD| + |PQ|$, takže jak čtyřúhelník $APQD$, tak i $CQPB$ s ním souměrně sdružený jsou opravdu tečnové. Všechna řešení úlohy jsou proto určena právě průsečíky kružnice k se stranami rovnoběžníku.

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABD je $b + |BD| > 2b$. Odtud plyne $|BD| > b$ čili $|SB| > \frac{1}{2}b$, tudíž B je vnějším bodem kružnice k. Stejný závěr platí i pro ostatní vrcholy rovnoběžníku $ABCD$. Všechny společné body kružnice k s přímkami AB a CD tedy leží uvnitř stran rovnoběžníku.



Obr. 5

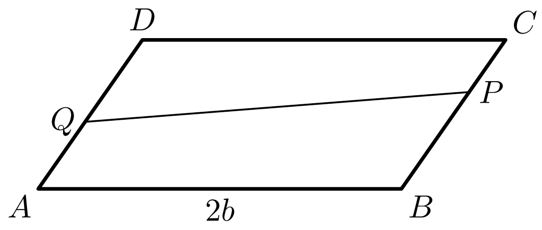


Obr. 6

V případě, že $ABCD$ je kosodélník (obr. 5), je jeho výška na stranu AB menší než b a vzdálenost středu S od přímek AB a CD je menší než $\frac{1}{2}b$, takže kružnice k má dva průsečíky s oběma delšími stranami a úloha má v tomto případě *dvě řešení* — jedno odpovídá rozdělení kosodélníku na dva shodné kosočtverce a druhé na dva shodné rovnoramenné lichoběžníky[2].

[2] Těm se dá kružnice i opsat, jsou tedy v dané situaci dokonce *dvojstředové*.

Pokud je $ABCD$ obdélník (obr. 6), jsou obě jeho delší strany tečnami kružnice k, která tak má s každou z nich společný právě jeden bod, tudíž existuje právě *jedno řešení*, jež odpovídá rozdělení daného obdélníku na dva shodné čtverce.



Obr. 7

Uvažujme nyní případ, kdy body P a Q jsou vnitřními body obou kratších protějších stran daného rovnoběžníku, např. nechť P je vnitřním bodem strany BC a Q je vnitřním bodem strany DA (obr. 7). Ve čtyřúhelníku $ABPQ$ pak již sama strana AB má větší délku než součet délek stran BP a QA, protože $|AB| = 2b$ a $|BP| + |QA| < |BC| + |DA| = 2b$. Kritérium z úvodu řešení tedy nemůže být splněno a další řešení v tomto případě nedostaneme.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyloučení případu, že přímka protíná kratší strany, 1 bod za uvedení rovností vyjadřujících podmínky, že čtyřúhelníky jsou tečnové, 1 bod za odvození rovnosti $c = b$, 1 bod za odvození rovnosti $|AP| = |CQ|$ a 2 body za dokončení řešení. Jeden bod strhněte, pokud si žák neuvědomí, že v případě obdélníku je jen jedno řešení. Za uhodnutí řešení (tj. pokud jsou pouze uvedena obě rozdělení na kosočtverce a rovnoramenné lichoběžníky, ale chybí postup dokazující, že jiná řešení neexistují) dejte 2 body — po jednom za každé řešení.

3. V celém řešení budeme pro zjednodušení pojmem *násobek* rozumět vždy celočíselný násobek.

Předpokládejme, že dvojice (p, q) celých čísel vyhovuje podmínkám úlohy. Pokud má uvažovaná kvadratická rovnice jeden z kořenů celočíselný, je i druhý kořen celočíselný, neboť podle Viètových vztahů kořeny x_1, x_2 a koeficient p uvažované kvadratické rovnice splňují podmínku $x_1 + x_2 = -p$. Pro oba celočíselné kořeny x_1, x_2 navíc platí $x_1 x_2 = q$.

Podle zadání je proto součet $x_1 + x_2$ násobkem součinu $x_1 x_2$, a tedy i násobkem každého z kořenů x_1, x_2. Rozdíl dvou násobků daného čísla je opět násobkem tohoto čísla, proto i $(x_1 + x_2) - x_1 = x_2$ je násobkem čísla x_1. Analogicky je x_1 násobkem čísla x_2. Aby byly kořeny navzájem svými násobky, nutně musí platit buď $x_2 = -x_1$, nebo $x_2 = x_1$. Oba případy dále vyšetříme zvlášť.

- Pokud $x_2 = -x_1$, tak $p = -(x_1 + x_2) = 0$ a $q = -x_1^2 \leqq 0$. Jelikož 0 je násobkem každého celého čísla, hodnota x_1 může být libovolným celým číslem a dané úloze vyhovuje každá dvojice $(p, q) = (0, -n^2)$, kde n je libovolné celé číslo (pro vygenerování všech *různých* řešení samozřejmě stačí uvažovat jen nezáporné hodnoty n).
- Pokud $x_2 = x_1 = x$, tak $p = -2x$ a $q = x^2$. Aby bylo $2x$ násobkem x^2, musí být buď $x = 0$, nebo 2 násobkem čísla x. První případ přísluší řešení $(p, q) = (0, 0)$, které už jsme obdrželi i v předchozím případě pro $n = 0$. V druhém případě x leží v množině $\{-2, -1, 1, 2\}$, čemuž postupně odpovídají dvojice $(p, q) \in \{(-4, 4), (-2, 1), (2, 1), (4, 4)\}$. Všechny čtyři zřejmě splňují podmínky zadání.

Odpověď. Úloze vyhovují dvojice $(-4, 4)$, $(-2, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 4)$, jakož i všechny dvojice $(0, -n^2)$, kde n je libovolné nezáporné celé číslo, a žádné jiné.

Jiné řešení. Předpokládejme, že dvojice (p, q) vyhovuje zadání, a označme x_1 celočíselný kořen dané rovnice a k takové celé číslo, že $p = k \cdot q$. Pak platí

$$x_1^2 + kx_1q + q = 0 \qquad \text{neboli} \qquad x_1^2 = -q(kx_1 + 1).$$

V případě, že $x_1 = 0$, dostáváme $q = 0$, a tedy i $p = 0$.

Pokud $x_1 \neq 0$, je x_1^2 nenulovým násobkem čísla $kx_1 + 1$. Protože čísla $kx_1 + 1$ a x_1, a tedy i čísla $kx_1 + 1$ a x_1^2 jsou nesoudělná,[3] je to možné jen v případě, že $kx_1 + 1 \in \in \{1, -1\}$.

- Pokud $kx_1 + 1 = 1$, je $kx_1 = 0$ a z nenulovosti x_1 plyne $k = 0$. Proto $q = -x_1^2$, $p = 0$ a podobně jako v prvním řešení dostáváme vyhovující dvojice $(p, q) = (0, -n^2)$, kde n je libovolné celé číslo (hodnota $n = 0$ zahrnuje i případ $x_1 = 0$, který jsme již prověřili samostatně).
- Pokud $kx_1 + 1 = -1$, je $kx_1 = -2$, tedy dvojice (k, x_1) je některou z dvojic $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-1, 2)$, snadno již dopočítáme $p = kx_1^2 = -2x_1$ a $q = x_1^2$, a dostaneme tak zbylá řešení jako při prvním postupu.

Poznámka. Rozbor rovnice

$$x_1^2 + kx_1q + q = 0 \tag{1}$$

z předchozího řešení lze provést i bez úvahy o nesoudělnosti. Skutečně, z (1) plyne $q \mid x_1^2$ a $x_1 \mid q$, odkud $x_1^2 \mid x_1q$, a proto z (1) dokonce plyne $x_1^2 \mid q$, což spolu s $q \mid x_1^2$ vede k závěru, že $q = \pm x_1^2$. Po dosazení $q = x_1^2$ přejde (1) do tvaru $x_1^2(2 + kx_1) = 0$, po dosazení $q = -x_1^2$ do tvaru $kx_1^3 = 0$. Závěr řešení je pak stejný jako při původním postupu.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu dejte 2 body za uvedení Viètových vztahů spolu s argumentem o celočíselnosti x_2, 2 body za odvození $x_2 = \pm x_1$ a po jednom bodu za dokončení každé větve. Při druhém postupu dejte 2 body za odvození rovnosti $x_1^2 = -q(kx_1 + 1)$, 2 body za vysvětlení, proč $kx_1 + 1 \in \{1, -1\}$, a po jednom bodu za dokončení každého případu. Pokud žák (při jakémkoli postupu) neuvažuje některou z dvojice větví a ve výsledku mu tak některé řešení chybí, udělte celkem nejvýše 4 body. Pokud žák úkol nevyřeší, ale uhodne *všechna* řešení, dejte 2 body; při uhodnutí jedné (kompletní) větve řešení dejte 1 bod.

[3] Čísla $kx_1 + 1$ a x_1 mohou být i záporná, nesoudělnost je i tehdy dobře definovaná.