64. ročník Matematické olympiády

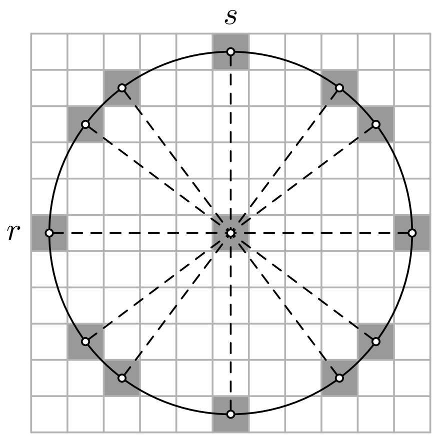
Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Je dáno přirozené číslo n. Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5.*

Řešení. Polohu jednotkových čtverečků budeme v řešení vyjadřovat souřadnicemi — čtvereček v r-tém řádku a s-tém sloupci označíme (r, s). Pomocí Pythagorovy věty snadno nahlédneme (obr. 1), že čtvereček (r, s) má vzdálenost 5 právě od čtverečků

$$\begin{gathered}(r,s+5),\ (r+5,s),\ (r+3,s+4),\ (r+4,s+3),\ (r+3,s-4),\ (r+4,s-3),\\ (r,s-5),\ (r-5,s),\ (r-3,s-4),\ (r-4,s-3),\ (r-3,s+4),\ (r-4,s+3).\end{gathered} \tag{1}$$

Celkem tak máme nejvýše 12 možností; méně jich je v případě, kdy některé ze souřadnic odpovídají poloze mimo čtverec $n \times n$, tj. když neleží v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$.



Obr. 1

Spočítejme nejdříve, kolik existuje dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r, s + 5)\}$, tedy „vodorovných“ dvojic. Pokud $n \geqq 5$, je jich v každém z n řádků $n - 5$, protože pro pevné r může s nabývat hodnot $1, 2, \ldots, n - 5$. Dohromady je „vodorovných“ dvojic $n(n - 5)$. Vzhledem k souměrnosti je stejně i „svislých“ dvojic.

Dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r + 3, s + 4)\}$ je celkem $(n - 4)(n - 3)$ (pokud $n \geqq 4$), protože r může nabývat hodnot $1, 2, \ldots, n - 3$ a s hodnot $1, 2, \ldots, n - 4$. Ze souměrnosti dostáváme, že i dvojic čtverečků typu $\{(r, s), (r + 4, s + 3)\}$, $\{(r, s), (r + 3, s - 4)\}$ a $\{(r, s), (r + 4, s - 3)\}$ je stejný počet.

Jelikož se zajímáme o počet neuspořádaných dvojic čtverečků, ostatní možnosti z (1) již započítávat nebudeme (jinak bychom každou dvojici započítali dvakrát). Celkem je tedy hledaný počet dvojic čtverečků v případě $n \geqq 5$ roven

$$2n(n - 5) + 4(n - 4)(n - 3) = 2(3n^2 - 19n + 24).$$

Pro $n \leqq 4$ je hledaný počet zřejmě rovný 0.

Poznámka. Úlohu lze řešit i následovně: Do každého čtverečku velkého čtverce vepíšeme číslo udávající počet čtverečků, které od něj mají vzdálenost 5. Pro výsledek stačí sečíst všechna vepsaná čísla a součet vydělit dvěma (každá dvojice čtverečků je v součtu započítána dvakrát). Přitom pokud je čtvereček od okrajových čtverečků čtverce vzdálen alespoň 5 (jeho souřadnice (r, s) tedy splňují nerovnosti $6 \leqq r, s \leqq n-5$), je v něm napsáno číslo 12. Stačí tedy vyšetřit čísla blízko okrajů čtverce, a zvlášť blízko jeho

4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
7	7	7	9	11	12	12		12	12	11	9	7	7	7
6	6	6	8	10	11	11		11	11	10	8	6	6	6
5	5	5	6	8	9	9		9	9	8	6	5	5	5
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4
4	4	4	5	6	7	7		7	7	6	5	4	4	4

Obr. 2

rohů. Nevýhodou tohoto přístupu je, že je nutné zvlášť vyšetřit situace pro $n \leqq 9$, kdy okrajové oblasti mají menší rozměr než v obecném případě $n \geqq 10$, pro který je situace znázorněna na obr. 2. Pro $n \geqq 10$ je výsledný počet dvojic roven

$$\frac{1}{2}\left(12(n-10)^2 + 4(n-10)(11+9+3\cdot 7) + 4(10+2\cdot 8+7\cdot 6+6\cdot 5+9\cdot 4)\right)$$

a podobné vyjádření (už bez proměnné n) vyplývající z obr. 3a až 3e lze napsat pro jednotlivé případy $n \in \{9, 8, 7, 6, 5\}$. Dá se ověřit (a vyplývá to z předchozího řešení), že všechna tato vyjádření se dají reprezentovat jedním vzorcem $2(3n^2 - 19n + 24)$.

2	1	0	1	2
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	1	0	1	2

Obr. 3a

4	3	2	2	3	4
3	2	1	1	2	3
2	1	0	0	1	2
2	1	0	0	1	2
3	2	1	1	2	3
4	3	2	2	3	4

Obr. 3b

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 2? [Pokud $n \geqq 2$, je jich v každém řádku $n-2$ a stejně i v každém sloupci. Celkem jich je $2n(n-2)$.]

N2. Kolik je ve čtverci $n \times n$ dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je $\sqrt{5}$? [Pro $n \geqq 2$ jich je $4(n-1)(n-2)$.]

4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4
3	3	2	2	2	3	3
3	3	2	0	2	3	3
3	3	2	2	2	3	3
4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4

Obr. 3c

4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4

Obr. 3d

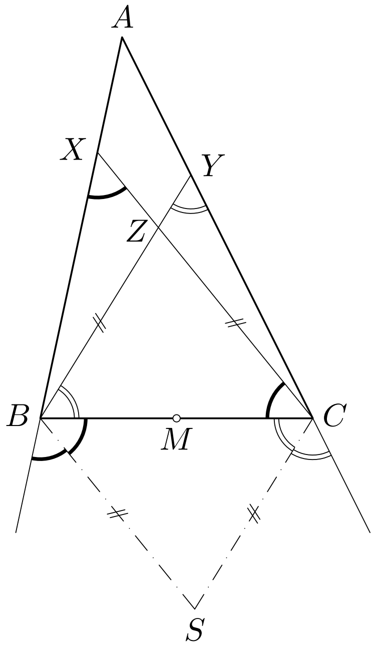
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
5	5	5	6	7	6	5	5	5
5	5	5	7	8	7	5	5	5
5	5	5	6	7	6	5	5	5
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4
4	4	4	5	5	5	4	4	4

Obr. 3e

D1. Určete počet dvojic (a, b) přirozených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pro které je součin ab dělitelný třemi. [51–C–II–1]

D2. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (tj. žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Pod cestou máme na mysli posloupnost políček, na které kobylka doskočí.) [62–C–I–1]

2. *Je dán trojúhelník ABC, v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M. Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímek CX a BY označme Z. Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku.*



Obr. 4

Řešení. Označme S střed kružnice připsané straně BC. Bod S leží na osách vnějších úhlů při vrcholech B a C daného trojúhelníku. Pokud tedy velikosti úhlů v trojúhelníku ABC označíme obvyklým způsobem, platí

$$|\sphericalangle CBS| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Podle zadání je trojúhelník CXB rovnoramenný se základnou CX. Jelikož při jeho hlavním vrcholu B má vnitřní úhel velikost β, pro velikost úhlu při základně platí rovnost

$$2|\sphericalangle BCX| + \beta = 180^\circ, \quad \text{odkud} \quad |\sphericalangle BCX| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta).$$

Je tedy $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCX|$, z čehož s ohledem na vlastnosti střídavých úhlů vyplývá, že přímky BS a XC jsou rovnoběžné (obr. 4).

Zřejmě analogickým postupem lze odvodit rovnoběžnost přímek CS a YB, takže čtyřúhelník $BSCZ$ je rovnoběžník. Protože bod M je středem jeho úhlopříčky BC, musí být středem i jeho druhé úhlopříčky SZ, body Z, M, S leží tudíž v přímce, což jsme měli dokázat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Označme S, T, U postupně středy kružnic připsaných stranám BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelníky SBC, ATC, ABU jsou podobné. [Trojúhelníky jsou podobné podle věty uu; velikosti jejich vnitřních úhlů jsou $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.]

N2. V daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme postupně K, L, M, N středy stran AB, BC, CD, DA. Dokažte, že střed úsečky KM leží na přímce LN. [Úsečky KL a NM jsou střední příčky trojúhelníků ACB a ACD, jsou tedy rovnoběžné s AC, tudíž i navzájem. Podobně $LM \parallel KN$. Takže $KLMN$ je rovnoběžník a středy úseček KM, LN jsou totožné.]

D1. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [53–B–I–2]

D2. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]

3. *Najděte všechna celá čísla $k \geqq 2$, pro která existuje k-prvková množina* M *celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z* M *je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z* M.

Řešení. Ukážeme, že vyhovuje každé $k \geqq 2$. Snažíme se tedy sestrojit k-prvkovou množinu přirozených čísel $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ takovou, že pro libovolné indexy i, j splňující $1 \leqq i < j \leqq k$ platí $n_i + n_j \mid n_1 n_2 \ldots n_k$. Konstrukci takové množiny založíme na postupu, při kterém začneme s libovolnou k-prvkovou množinou a pokusíme se ji změnit na vyhovující.

Uvažujme nejprve jednoduchý případ $k = 2$ a začněme s množinou $\{1, 2\}$. Součin jejích prvků je roven 2, zatímco jediný možný součet jejích dvou různých prvků je $1 + 2 = 3 \nmid 2$, množina tedy nevyhovuje. Pokud však každý její prvek vynásobíme číslem 3 (tedy číslem, které „způsobilo“, že množina nevyhovuje), dostaneme vyhovující množinu $\{3, 6\}$, protože $3 + 6 = 9 \mid 3 \cdot 6$.

Podobně pokud v případě $k = 3$ začneme s množinou $\{1, 2, 3\}$ se součinem prvků 6, obdržíme „nevyhovující“ součty $1 + 3 = 4 \nmid 6$, $2 + 3 = 5 \nmid 6$. Vynásobíme-li všechny prvky této množiny číslem $4 \cdot 5 = 20$, dostaneme vyhovující množinu $\{20, 40, 60\}$.[1] Množina by samozřejmě vyhovovala i v případě, že bychom čísla vynásobili nějakým větším násobkem čísla 20.

Načrtnutý postup nyní zobecníme pro libovolné $k \geqq 2$. Začněme s množinou $\{1, 2, \ldots, k\}$. Chceme všechny její prvky vynásobit takovým číslem N, které je násobkem těch součtů $i + j$ (pro $1 \leqq i < j \leqq k$), jež nedělí součin $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k = k!$. Jelikož $i + j \leqq 2k - 1$, stačí například položit $N = (2k - 1)!$. (Číslo N tak bude násobkem všech možných součtů $i + j$, nejen těch, které nedělí $k!$, což na to, zda výsledná množina vyhovuje, nemá vliv.)

Sestrojili jsme tedy množinu

$$\bigl\{(2k-1)!, 2 \cdot (2k-1)!, \ldots, k \cdot (2k-1)!\bigr\},$$

o které ukážeme, že vyhovuje podmínkám úlohy. Součin jejích prvků je totiž roven $k! \cdot ((2k-1)!)^k$ a přitom pro každá dvě i, j splňující $1 \leqq i < j \leqq k$ platí $i + j \mid (2k-1)!$, a tudíž (vzhledem k podmínce $k \geqq 2$)

$$i \cdot (2k-1)! + j \cdot (2k-1)! = (i + j) \cdot (2k-1)! \mid k!((2k-1)!)^k.$$

[1] Pro splnění podmínek zadání by dokonce stačilo prvky vynásobit číslem $2 \cdot 5 = 10$.

Poznámka. Uvedený postup lze aplikovat obecněji pro libovolnou počáteční k-tici různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Označme N *libovolný* společný násobek všech $\binom{k}{2}$ čísel $a_i + a_j$, $1 \leqq i < j \leqq k$ (můžeme například za N vzít jejich *nejmenší* společný násobek). Pak má k-prvková množina

$$\{Na_1, Na_2, \ldots, Na_k\}$$

požadovanou vlastnost, protože součin všech jejích prvků je dělitelný číslem N^k, zatímco součet libovolných dvou jejích prvků je dělitelem čísla N^2. Poslední tvrzení platí díky tomu, že z podmínky $a_i + a_j \mid N$ vyplývá

$$Na_i + Na_j = N(a_i + a_j) \mid N^2.$$

JINÉ ŘEŠENÍ. Pro $k = 2$ a $k = 3$ lze zkoušením nebo postupem z úvodu prvního řešení objevit vyhovující množiny, např. $\{3, 6\}$ a $\{3, 12, 15\}$. Ukážeme, že pro každé $k \geqq 4$ je vyhovující množinou $\mathsf{M} = \{2, 6, 10, \ldots, 4k - 2\}$, tedy množina dvojnásobků prvních k lichých přirozených čísel. Součin prvků této množiny je

$$2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k - 1). \tag{1}$$

Součet i-tého a j-tého prvku množiny M (pro $1 \leqq i < j \leqq k$) je roven

$$2(2i - 1) + 2(2j - 1) = 4i + 4j - 4 = 4(i + j - 1) = 4 \cdot 2^\alpha \cdot n,$$

kde n je největší lichý dělitel čísla $i + j - 1$ a α je exponent čísla 2 v prvočíselném rozkladu čísla $i + j - 1$. Jelikož $1 \leqq n \leqq i + j - 1 \leqq 2k - 2$, nachází se činitel n v součinu $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k - 1)$. Matematickou indukcí lze snadno pro $k \geqq 4$ dokázat nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$, ze které vyplývá $\alpha \leqq k - 2$ (neboť $2^\alpha \mid i + j - 1 < 2k - 1$). Proto $4 \cdot 2^\alpha \mid 2^k$. Dohromady tak dostáváme, že $4 \cdot 2^\alpha \cdot n$ dělí součin (1), což jsme chtěli dokázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla a, b, c, d platí $a \mid c$ a $b \mid d$, pak $ab \mid cd$. [Z předpokladů vyplývá, že zlomky c/a, d/b jsou celá čísla, takže i jejich součin cd/ab je celé číslo.]

N2. Dokažte, že pokud jsou přirozená čísla a, b nesoudělná, pak $a + b \nmid ab$. [Pokud $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, pak $\mathrm{nsd}(a + b, a) = \mathrm{nsd}(a + b - a, a) = \mathrm{nsd}(a, b) = 1$. Podobně $\mathrm{nsd}(a + b, b) = 1$. Odtud $\mathrm{nsd}(a + b, ab) = 1$, takže zlomek $ab/(a + b)$ je v základním tvaru, a protože $a + b > 1$, není celým číslem.]

N3. Dokažte, že žádná tříprvková množina vyhovující zadání neobsahuje číslo 1. [Sporem: nechť množina $\{1, a, b\}$ vyhovuje. Pak $a + 1 \mid ab$, a jelikož $\mathrm{nsd}(a + 1, a) = 1$, nutně $a + 1 \mid b$, čili $a < b$. Analogicky $b < a$, čímž dostáváme spor.]

N4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž není žádné prvočíslo. [Vyhovuje např. k-tice $(k + 1)! + 2, (k + 1)! + 3, \ldots, (k + 1)! + (k + 1)$.]

D1. Dokažte, že existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ přirozených čísel taková, že pro každé přirozené číslo $k \geqq 2$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^\infty$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. Rozhodněte, zda existuje rostoucí posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ přirozených čísel taková, že pro každé celé číslo $k \geqq 0$ posloupnost $(k + a_n)_{n=1}^\infty$ obsahuje pouze konečně mnoho prvočísel. [46–A–III–4]

D2. Dokažte matematickou indukcí pro $k \geqq 4$ nerovnost $2^{k-1} > 2k - 1$.

D3. Ukažte, že pro každé celé $k \geqq 2$ lze vybrat k různých přirozených čísel tak, aby jejich součin byl dělitelný každým číslem, které je součtem několika z vybraných čísel (ne nutně dvou jako v soutěžní úloze). [Libovolně vybranou k-tici čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ zaměňte za k-tici $Na_1, Na_2, \ldots, Na_k$, kde N je společný násobek všech $2^k - k - 1$ součtů $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_r}$ $(2 \leqq r \leqq k)$.]

4. *Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí*

$$15(x+y+z) = 12(xy+yz+zx) = 10(x^2+y^2+z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

a) Dokažte rovnost $x+y+z=4$.

b) Najděte nejmenší interval $\langle a,b\rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x,y,z) vyhovující předpokladům úlohy.

Řešení. a) Hodnotu, které se rovnají tři výrazy uvedené v zadání, označme a. Platí tedy

$$x+y+z = \tfrac{1}{15}a, \qquad xy+yz+zx = \tfrac{1}{12}a, \qquad x^2+y^2+z^2 = \tfrac{1}{10}a.$$

Po dosazení do známého vztahu $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ dostaneme pro a rovnici

$$\left(\tfrac{1}{15}a\right)^2 = \tfrac{1}{10}a + 2\cdot\tfrac{1}{12}a \quad \text{neboli} \quad a(a-60)=0.$$

Alespoň jedno z čísel x, y, z je nenulové, proto $a = 10(x^2+y^2+z^2) > 0$. Nutně tedy $a=60$, čili $x+y+z = 60/15 = 4$.

b) Z první části řešení plyne $xy+yz+zx = 60/12 = 5$. Tato rovnost spolu s rovností $x+y+z=4$ jsou zřejmě ekvivalentním přepisem předpokladů ze zadání. Zapišme je ve tvaru

$$\begin{aligned} x+y &= 4-z,\\ xy &= 5-z(x+y) = 5-z(4-z) = z^2-4z+5. \end{aligned} \tag{1}$$

Podle Viètových vztahů jsou taková x, y právě kořeny kvadratické rovnice

$$t^2+(z-4)t+z^2-4z+5=0 \tag{2}$$

s neznámou t a diskriminantem

$$D = (z-4)^2-4(z^2-4z+5) = -3z^2+8z-4 = -(3z-2)(z-2).$$

Reálné hodnoty x, y splňující (1) existují, právě když je tento diskriminant nezáporný, tedy když $\frac{2}{3} \leqq z \leqq 2$. Vzhledem k symetrii platí stejné podmínky i pro proměnné x, y. Hledaný nejmenší interval je proto $\langle \frac{2}{3}, 2\rangle$.

Poznámka. V uvedeném řešení jsme předpoklady úlohy nahradili ekvivalentními podmínkami. V případě, že bychom dělali jen důsledkové úpravy, museli bychom na závěr ještě ukázat, že pro krajní hodnoty $z=\frac{2}{3}$, resp. $z=2$ opravdu existují hodnoty x, y splňující zadání. Ty dostaneme jednoduchým dopočítáním dvojnásobných kořenů kvadratické rovnice (2) (neboť diskriminant je pro uvedené hodnoty z nulový). Odpovídající trojice (x,y,z) jsou $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a (1,1,2).

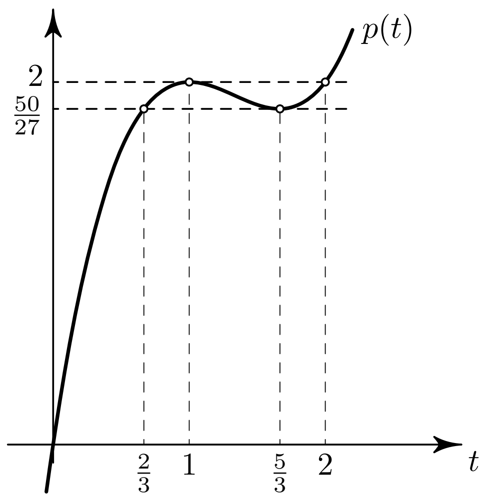
Jiné řešení části b). Objevíme-li vyhovující trojice $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3})$ a (1,1,2), můžeme dolní a horní ohraničení neznámé z odvodit úpravou následujících zřejmých nerovností (využijeme přitom vztahy $x+y+z=4$ a $x^2+y^2+z^2=60/10=6$):

$$\begin{aligned}\left(x-\tfrac{5}{3}\right)^2+\left(y-\tfrac{5}{3}\right)^2+\left(z-\tfrac{2}{3}\right)^2 &\geqq 0,\\ x^2+y^2+z^2-\tfrac{10}{3}(x+y+z)+2z+\tfrac{54}{9} &\geqq 0,\\ 6-\tfrac{40}{3}+2z+\tfrac{54}{9} &\geqq 0,\\ z &\geqq \tfrac{2}{3},\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 &\geqq 0,\\ x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)-2z+6 &\geqq 0,\\ 6-8-2z+6 &\geqq 0,\\ 2 &\geqq z.\end{aligned}$$

Poznámka. Pokud reálná čísla x, y, z splňují rovnosti $x+y+z=4$ a $xy+yz+zx=5$, podle Viètových vztahů jsou trojicí kořenů kubického mnohočlenu t^3-4t^2+5t-c, ve kterém $c=xyz$. Označme $p(t)=t^3-4t^2+5t$. Rovnice $p(t)=c$ má tři reálné kořeny, právě když graf konstantní funkce s hodnotou c protíná graf funkce $p(t)$ ve třech bodech; v hraničních případech se grafu dotýká, což odpovídá dvojnásobným kořenem mnohočlenu $p(t)-c$.



Obr. 5

Z obr. 5 je pak vidět, jakých hodnot mohou nabývat x, y, z, a speciálně i jejich ohraničení: $\frac{2}{3} \leqq x, y, z \leqq 2$. Samozřejmě že při tomto postupu je pro korektní řešení třeba vypočítat, v kterých bodech funkce $p(t)$ nabývá lokální extrémy a následně dopočítat průsečíky příslušných přímek s jejím grafem. Na obr. 5 je pouze grafické shrnutí takového postupu.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rovnice $x^3-5x^2+2x+3=0$ má tři reálné kořeny. Jaký je součet jejich druhých mocnin? [Pokud a, b, c jsou kořeny dané rovnice, platí podle Viètových vztahů $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=2$, a tedy $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=5^2-2\cdot 2=21$.]

N2. Součin dvou reálných čísel je dvojnásobkem jejich součtu. Jaký může být jejich součet? [Pokud $a+b=p$ a $ab=2p$, po vyjádření $b=pa$ a dosazení do druhé rovnice dostaneme

$a^2 - ap + 2p = 0$, což je kvadratická rovnice s diskriminantem $p^2 - 8p$. Ten je nezáporný (existuje tudíž reálné řešení), právě když $p \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 8, \infty)$.]

D1. Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, je

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geqq 1.$$

[46–A–S–3]

D2. Určete všechny trojice reálných čísel a, b, c, které splňují podmínky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

[62–A–S–3]

D3. Najděte všechny možné hodnoty součtu $x + y$, jestliže reálná čísla x, y splňují rovnost $x^3 + y^3 = 3xy$. [48–B–I–6]

D4. Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b + c + d$ a zjistěte, které vyhovující čtveřice a, b, c, d ji dosahují. [61–A–II–4]

D5. Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě rovnic

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení: a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25. b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5. [60–A–III–3]

5. *V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L. Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici.*

Řešení. Na úvod připomeňme známé tvrzení: Jsou-li D, E, F body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC postupně se stranami BC, CA, AB a délky stran jsou označeny jako obvykle, je

$$|AE| = |AF| = \frac{b + c - a}{2}, \quad |BF| = |BD| = \frac{c + a - b}{2}, \quad |CD| = |CE| = \frac{a + b - c}{2}.$$

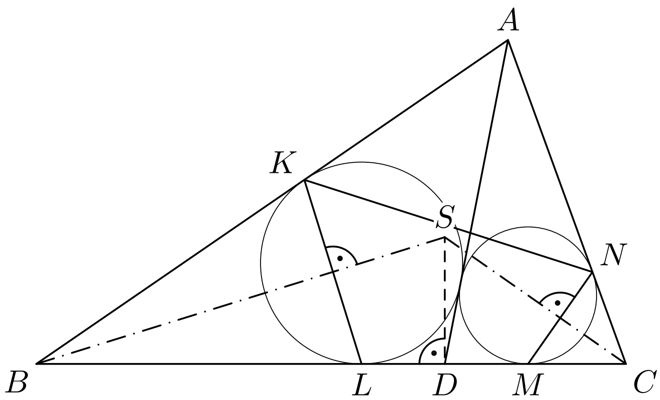
Toto tvrzení jsme zformulovali pouze pro trojúhelník ABC, v řešení je však budeme využívat i pro trojúhelníky ABD a ACD.

K důkazu toho, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, stačí ukázat, že osy tří jeho stran se protínají v jednom bodě.[2] Přitom osy jeho stran KL a MN jsou zároveň osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech B a C, protože trojúhelníky LKB, MNC jsou rovnoramenné se základnami LK, MN. Tyto dvě osy se protínají ve středu kružnice vepsané trojúhelníku ABC, který jsme označili S (obr. 6). Dokážeme, že tímto bodem prochází i osa strany LM.

Jelikož poloměr SD vepsané kružnice je kolmý na stranu BC, potřebujeme dokázat, že D je středem úsečky LM (pak SD bude její osou). K tomu využijeme úvodní tvrzení. Jeho aplikací na trojúhelník ABD a úsek DL a následně na trojúhelník ABC a úsek BD dostaneme

$$|DL| = \frac{|BD| + |AD| - |AB|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(c + a - b) + |AD| - c}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a - b - c) + |AD|}{2}.$$

[2] Takový průsečík má totiž stejnou vzdálenost od všech čtyř jeho vrcholů, tudíž existuje kružnice, která v něm má střed a prochází všemi čtyřmi vrcholy.



Obr. 6

Podobně máme

$$|DM| = \frac{|CD| + |AD| - |AC|}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+b-c) + |AD| - b}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a-b-c) + |AD|}{2}.$$

Odtud $|DL| = |DM|$, takže D je opravdu středem úsečky LM, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Z faktu, že $|DL| = |DM|$, kromě jiného vyplývá i to, že kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a ADC se dotýkají úsečky AD ve stejném bodě.

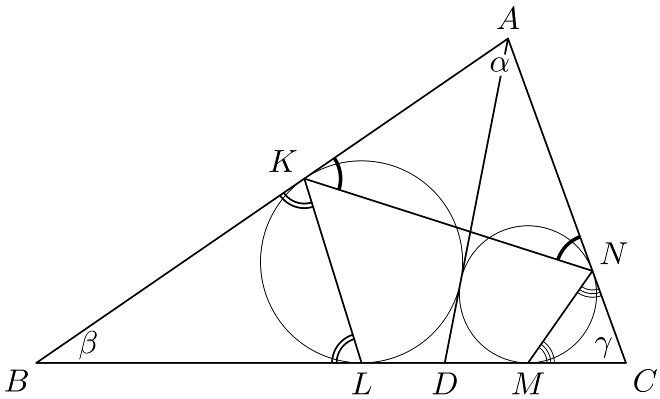
Jiné řešení. Opět vícekrát využijeme tvrzení z úvodu prvního řešení. Podle něj pro délku úseku AK v trojúhelníku ABD máme

$$|AK| = \frac{|AB| + |AD| - |BD|}{2} = \frac{c + |AD| - \frac{1}{2}(c+a-b)}{2} = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b+c-a)}{2}$$

a podobně

$$|AN| = \frac{|AD| + \frac{1}{2}(b+c-a)}{2}.$$

Jelikož $|AK| = |AN|$, je trojúhelník KNA rovnoramenný (obr. 7), čili $|\sphericalangle ANK| =$



Obr. 7

$= 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Z rovnoramenných trojúhelníků LKB, MNC máme $|\sphericalangle BLK| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle MNC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Na základě toho jednoduše vyjádříme

$$|\sphericalangle KLM| = 180° - |\sphericalangle BLK| = 90° + \tfrac{1}{2}\beta,$$
$$|\sphericalangle MNK| = 180° - |\sphericalangle MNC| - |\sphericalangle ANK| = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma,$$

odkud $|\sphericalangle KLM| + |\sphericalangle MNK| = 90° + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$, což znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, jak jsme měli dokázat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nechť P je bod ležící ve vnější oblasti dané kružnice k. Tímto bodem vedeme tečny, které se kružnice k dotýkají postupně v bodech U, V. Dokažte, že $|PU| = |PV|$. [Vyplývá to ze souměrnosti podle přímky PS, kde S je střed kružnice k.]

N2. Dokažte, že kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran v bodech D, E, F určených rovnostmi $|AE| = |AF| = s-a$, $|BF| = |BD| = s-b$, $|CD| = |CE| = s-c$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. [Rovnosti $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$, $|CD| = |CE|$ vyplývají z předešlé návodné úkoly. Pokud délky těchto úseků označíme x, y, z, dostaneme soustavu $x+y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$, jejíž řešením dostaneme vyjádření $x = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$.]

N3. Dokažte, že pokud se osy některých tří stran čtyřúhelníku protínají v jednom bodě, je tento čtyřúhelník tětivový. [Průsečík os tří stran je stejně vzdálen od všech čtyř vrcholů.]

N4. Nechť D, E, F jsou body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC s jeho stranami. Dokažte, že trojúhelník DEF je ostroúhlý. [Velikosti úhlů trojúhelníku DEF jsou $90° - \frac{1}{2}\alpha$, $90° - \frac{1}{2}\beta$, $90° - \frac{1}{2}\gamma$, což jsou všechno ostré úhly.]

D1. Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte. [49–A–I–2]

D2. Na přímce a, na které leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří jemu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané. [63–B–S–3]

6. *Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$?*

Řešení. Ukážeme, že pro každé $n > 1$ existuje $k > 0$ takové, že $x_n \mid x_{n+k}$. Z toho pak nutně vyplývá, že každý člen posloupnosti (s případnou výjimkou prvního členu) dělí nekonečně mnoho dalších členů, protože opakované použití tohoto tvrzení zaručuje existenci nekonečné posloupnosti relací

$$x_n \mid x_{n+k_1} \mid x_{n+k_1+k_2} \mid x_{n+k_1+k_2+k_3} \mid \ldots$$

Nechť tedy $n > 1$ je pevné. Vyjádřeme následující členy pomocí parametrů a, b a x_n. Pomocí daného předpisu postupně dostaneme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + b, \\ x_{n+2} &= a(ax_n + b) + b = a^2 x_n + b(1 + a), \\ x_{n+3} &= a(a^2 x_n + b + ba) + b = a^3 x_n + b(1 + a + a^2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecně pro každé celé $k > 0$ platí

$$x_{n+k} = a^k x_n + b(1 + a + \ldots + a^{k-1}),$$

což se dá formálně dokázat triviální matematickou indukcí. Proto požadovaná vlastnost $x_n \mid x_{n+k}$ je ekvivalentní s podmínkou $x_n \mid b(1+a+\ldots+a^{k-1})$. Ukážeme, že existuje k, pro něž

$$x_n \mid 1+a+\ldots+a^{k-1}, \tag{1}$$

čímž bude zaručeno, že x_n dělí x_{n+k}.

Uvažujme posloupnost

$$1,\ 1+a,\ 1+a+a^2,\ 1+a+a^2+a^3,\ \ldots,$$

tj. posloupnost čísel $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ s předpisem $s_k = 1+a+\ldots+a^{k-1}$. V této nekonečné posloupnosti určitě existují dva členy, které dávají stejný zbytek při dělení číslem x_n, protože možných zbytků je jen konečně mnoho. Řekněme, že jsou to členy s_{k_1} a s_{k_2}, přičemž $k_1 < k_2$. Rozdíl $s_{k_2} - s_{k_1}$ je pak dělitelný číslem x_n, čili

$$x_n \mid (1+a+\ldots+a^{k_2-1}) - (1+a+\ldots+a^{k_1-1}) = a^{k_1}(1+a+\ldots+a^{k_2-k_1-1}). \tag{2}$$

Čísla a, b jsou nesoudělná, proto číslo $x_n = ax_{n-1}+b$ je nesoudělné s a (žádný netriviální dělitel čísla a nedělí b, a tedy nedělí ani $ax_{n-1}+b$), čili i čísla x_n a a^{k_1} jsou nesoudělná. Z (2) proto vyplývá

$$x_n \mid 1+a+\ldots+a^{k_2-k_1-1},$$

čímž jsme dokázali platnost (1) pro $k = k_2 - k_1 > 0$.

Tvrzení o členu x_1 obecně neplatí, čísla x_1 a a totiž nemusejí být nesoudělná (to byla v předchozím postupu jediná podmínka k tomu, abychom našli $k > 0$ takové, že $x_n \mid x_{n+k}$). Vskutku, pokud například zvolíme $a > 1$ a $x_1 = a$, bude relace $x_1 \mid x_n$ platit pouze pro $n = 1$, neboť každý člen x_n s indexem $n > 1$ je podle vyjádření $x_n = ax_{n-1} + b$ číslo, které je — stejně jako dané b — s číslem a (tedy i se zvoleným číslem x_1) nesoudělné.

Jiné řešení. Odlišným způsobem dokážeme, že pro každé $n > 1$ existuje $k > 0$, pro které platí (1). Podobně jako v předchozím řešení odvodíme, že čísla x_n a a jsou nesoudělná. Podle Eulerovy věty je posloupnost zbytků čísel $1, a, a^2, a^3, \ldots$ při dělení číslem x_n periodická od prvního členu, přičemž délka periody (ne nutně nejkratší) je $\varphi(x_n)$.[3]

Pro zjednodušení zápisu označme $\varphi(x_n) = r$. Vzhledem k uvedenému platí

$$\begin{aligned}
a^0 &\equiv a^r &&\equiv a^{2r} &&\equiv \ldots \equiv a^{(x_n-1)r} &&\pmod{x_n},\\
a^1 &\equiv a^{r+1} &&\equiv a^{2r+1} &&\equiv \ldots \equiv a^{(x_n-1)r+1} &&\pmod{x_n},\\
&\vdots\\
a^{r-1} &\equiv a^{2r-1} &&\equiv a^{3r-1} &&\equiv \ldots \equiv a^{x_n r-1} &&\pmod{x_n}.
\end{aligned}$$

Proto součet všech vypsaných mocnin čísla a (kterých je x_n v každém řádku) je kongruentní podle modulu x_n s x_n-násobkem součtu r mocnin vybraných po jedné z každého řádku. Jakýkoliv x_n-násobek je však kongruentní s nulou, a tak je platnost (1) ověřena pro $k = x_n \cdot r = x_n \cdot \varphi(x_n)$.

[3] Funkce φ je tzv. Eulerova funkce, tj. $\varphi(m)$ je počet přirozených čísel menších než m, která jsou s m nesoudělná.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zopakujte si a dokažte následující tvrzení z teorie čísel:

a) pokud $\mathrm{nsd}(a,b)=1$ a $a \mid bc$, pak $a \mid c$;

b) $\mathrm{nsd}(a,b)=\mathrm{nsd}(a-kb,b)$;

c) pokud $\mathrm{nsd}(a,b)=1$, pak $\mathrm{nsd}(a^m,b^n)=1$.

N2. Je dána k-prvková množina M, jejíž prvky jsou celá čísla. Dokažte, že existuje neprázdná podmnožina množiny M, součet jejíchž prvků je násobkem čísla k. [Nechť $\mathsf{M}=\{a_1,\dots,a_k\}$. Pokud se mezi k čísly a_1, a_1+a_2, …, $a_1+a_2+\dots+a_k$ nachází násobek k, je tvrzení zřejmé. V opačném případě se mezi nimi nacházejí dvě čísla $a_1+\dots+a_i$, $a_1+\dots+a_j$, $i<j$, jež dávají při dělení číslem k stejný zbytek, takže jejich rozdíl je násobkem k, a přitom je to zároveň i součet prvků množiny $\{a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_j\}$.]