64. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$|x-5|+|y-9|=6,$$
$$|x^2-9|+|y^2-5|=52.$$

Řešení. Z první rovnice dané soustavy plyne $|y-9|=6-|x-5|\leqq 6$. Odtud dostáváme $3\leqq y\leqq 15$, proto $y^2-5\geqq 4$, a tedy $|y^2-5|=y^2-5$. Z druhé rovnice dané soustavy máme $y^2-5=52-|x^2-9|\leqq 52$, tedy $y^2-5\leqq 52$, neboli $y^2\leqq 57<64$, takže $-8<y<8$. Z obou odhadů tak máme $3\leqq y<8$, proto $|y-9|=9-y$. Množina řešení dané soustavy v oboru reálných čísel je tak shodná s množinou řešení soustavy

$$|x-5|+9-y=6, \tag{1}$$
$$|x^2-9|+y^2-5=52 \tag{2}$$

v oboru vymezeném nerovnostmi $3\leqq y<8$ (které zřejmě zaručují, že se v rovnicích (1) a (2) můžeme vrátit k původním absolutním hodnotám). Z rovnice (1) dostaneme $|x-5|=y-3$, což díky omezení $y<8$ dává $|x-5|<5$ neboli $0<x<10$. Pro odstranění absolutních hodnot v nové soustavě rovnic tak rozlišíme pouze tři případy.

a) $0<x<3$. V tom případě z (1) plyne $y=8-x$. Dosazením do (2) dostaneme
$$9-x^2+(8-x)^2-5=52$$
neboli $x=1$. Příslušné $y=8-x=7$ obě výchozí omezení $3\leqq y<8$ splňuje.

b) $3\leqq x<5$. I v tomto případě z (1) plyne $y=8-x$, dosazením do (2) však dostaneme
$$x^2-9+(8-x)^2-5=52,$$
což po úpravě dává kvadratickou rovnici $x^2-8x-1=0$. Snadno ověříme, že tato rovnice nemá kořen splňující podmínku $3\leqq x<5$.

c) $5\leqq x<10$. V tomto případě z (1) plyne $y=x-2$. Dosazením do (2) dostaneme
$$x^2-9+(x-2)^2-5=52,$$
což po úpravě dává $x^2-2x-31=0$. Tato rovnice má dva reálné kořeny $1\pm 4\sqrt{2}$, z nichž podmínku $5\leqq x<10$ splňuje pouze kořen $x=1+4\sqrt{2}$. Podle $y=x-2$ dopočítáme $y=4\sqrt{2}-1$ a jako v bodě a) se přesvědčíme, že jsou splněna omezení, která jsme se soustavou rovnic (1) a (2) spojili: Nerovnosti $3\leqq 4\sqrt{2}-1<8$ jsou jasné důsledky odhadu $1<\sqrt{2}<2$.

Díky našemu postupu můžeme i bez zkoušky konstatovat, že původně zadaná soustava rovnic má v oboru reálných čísel právě dvě řešení

$$(x;y)\in\{(1;7),(4\sqrt{2}+1;4\sqrt{2}-1)\}.$$

Poznámka. Zdůrazněme, že odvozenou podmínku $y\leqq\sqrt{57}$ jsme v řešení zaměnili za slabší nerovnost $y<8$ jen kvůli jednoduchosti dalších zápisů. Zmiňme rovněž, že ze způsobu odvození soustavy rovnic (1) a (2) je vidět, proč *každé* její řešení v oboru reálných čísel splňuje omezení $3\leqq y<8$. Z rovnice (1) totiž plyne $9-y\leqq 6$ čili $y\geqq 3$, z rovnice (2) pak $y^2-5\leqq 52$ neboli $|y|\leqq\sqrt{57}$. Taková zmínka by neměla v úplném řešení podle uvedeného postupu chybět, jsou-li v bodech a) a c) vynechány závěrečné prověrky nerovností $3\leqq y<8$ a není-li provedena závěrečná zkouška pro *původní* soustavu.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Řešte rovnici $|4x-2|+|x-2|=6$. [Rovnice má dvě řešení $-\frac{2}{5}$ a 2.]
2. Nechť pro reálná čísla x a y platí $|x^2+4|+|y^2-65|=20$, potom $x \in \langle -4; 4\rangle$ a $y \in$ $\in \langle -9; -7\rangle \cup \langle 7; 9\rangle$. Dokažte.
3. V oboru reálných čísel řešte rovnici $2^{|x+1|}-2^x = 1+|2^x-1|$. [63–B–S–1]

D1. Určete všechna reálná čísla p, pro něž má rovnice $(x-1)^2 = 3|x|-px$ právě tři různá řešení v oboru reálných čísel. [52–B–II–3]

D2. Určete všechna reálná čísla s a t, pro která je grafem funkce

$$f(x)=\frac{x^2-4x+s}{t|x-1|+x+7}$$

lomená čára složená ze dvou polopřímek. [50–A–II–2]

D3. Pro která reálná čísla a, b je funkce $f(x)=a|x-1|+b(x-3)+|x-b|+x-1$ omezená? [49–B–S–1]

2. *Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav okamžitě dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery.*

Řešení. Nejprve ukážeme, že pokud drak s alespoň $2k$ hlavami zvolí vhodnou strategii, rytíř ho nikdy nemůže zbavit všech hlav. Očíslujme krky draka dokola v kladném směru (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček) čísly od 1 do n, přitom $n \geqq 2k$. V kladném směru je tak mezi krky s čísly 1 a $k+1$ právě $k-1$ krků, zatímco ve směru opačném je mezi nimi $n-k-1 \geqq k-1$ krků. Protože rytíř může tít po k sousedních krcích, nemůže jedním úderem stít hlavy na krcích s čísly 1 a $k+1$. Setne-li při nějakém úderu jednu z nich, drak si ji nechá dorůst (má na to nárok díky druhé z obou hlav). Tak si drak zajistí, že před každým úderem bude mít obě zmíněné hlavy, takže ho rytíř všech hlav nikdy nezbaví.

Přejděme k případu, kdy platí opačná nerovnost $n<2k$ neboli $n \leqq 2k-1$, a popišme dále, jak tehdy rytíř dokáže zbavit draka všech hlav nejvýše třemi údery. Pro $k=1$ je $n \leqq 2-1=1$ a v takovém případě stačí zřejmě rytíři jediný úder. Můžeme tedy předpokládat, že $k \geqq 2$.

Také v případě, kdy $n \leqq k$, umí rytíř prvním sekem stít všechny drakovy hlavy. Předpokládejme proto dále, že $k < n \leqq 2k-1$.

Nejprve ukážeme, že pokud má drak $n \leqq 2k-1$ krků, může rytíř stít libovolné dvě hlavy A, B jedním úderem. Nechť mezi hlavami A a B je v kladném směru l hlav a v opačném směru m hlav. Potom $l+m=n-2 \leqq 2k-3$. Pokud by obě čísla l a m byla alespoň $k-1$, byl by jejich součet alespoň $2k-2$, což není možné. Proto je aspoň jedno z čísel l nebo m nejvýše $k-2$. Pokud tedy rytíř sekne přes k krků počínaje hlavou A pro $l \leqq k-2$ v kladném směru a pro $m \leqq k-2$ ve směru opačném, utne s hlavou A i hlavu B. Nyní už popíšeme strategii rytíře.

Rytíř prvním úderem setne k hlav a drakovi zůstane množina M sousedících hlav, která obsahuje $n-k \leqq k-1$ hlav. Druhým úderem rytíř setne všechny hlavy z množiny M. Mezitím drakovi mohly dorůst nejvýše dvě hlavy, ty ovšem rytíř umí utnout jedním úderem, jak jsme ukázali výše, a drak tedy po nejvýše třech úderech zůstane bez hlav. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

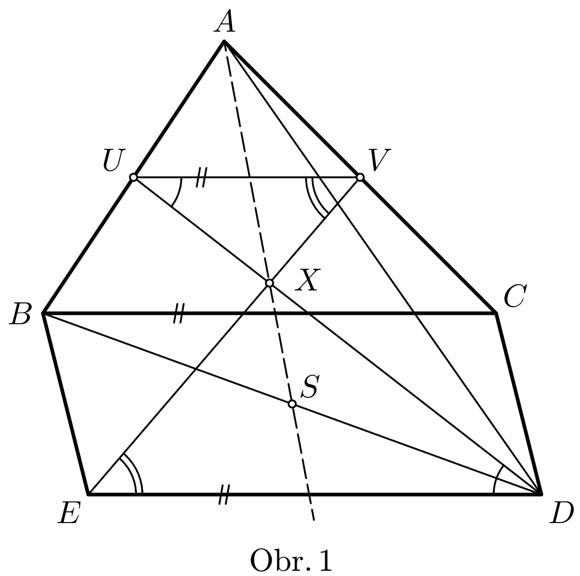
1. Uvažujme situaci ze zadání úlohy 2. Nechť rytíř dokáže jedním úderem tít po 2 sousedních krcích.
   a) Pokud má drak 3 hlavy, potom je rytíř schopen zbavit draka všech hlav dvěma údery. Popište rytířovu strategii.
   b) Dokažte, že pokud má drak 4 hlavy, potom si drak může nechat dorůstat hlavy tak, že ho rytíř nikdy nezbaví všech hlav. Popište drakovu strategii.

   [Označme hlavy draka dokola čísly $1, 2, \ldots$ a) Nechť rytíř prvním úderem setne hlavy 2 a 3. Drakovi zbývá hlava 1, proto si některou z useknutých hlav nechá dorůst. Ale každá z useknutých hlav sousedí s hlavou 1, a jakmile doroste, rytíř ji usekne spolu s hlavou 1 druhým úderem. b) Rytíř nemůže jedním úderem tít po krcích, na kterých jsou hlavy 2 a 4, současně však jedním úderem musí jednu z těchto dvou hlav setnout. Po každém úderu tedy drakovi zbyde buď hlava 2, nebo hlava 4 a drak si následně nechá druhou z těchto hlav dorůst.]

D1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla. [60–A–I–5]

3. *V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC. V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE. Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.*

Řešení. Uvědomme si, že rovnoběžník je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček. Libovolná přímka procházející tímto průsečíkem proto rozdělí rovnoběžník na dvě shodné oblasti se stejným obsahem. Označme S průsečík úhlopříček rovnoběžníku $BCDE$, je to zároveň střed úsečky BD (obr. 1). K důkazu, že přímka AX dělí rovnoběžník na dvě části téhož obsahu, tedy stačí ukázat, že prochází bodem S.



Obr. 1

Úsečka UV je střední příčkou trojúhelníku ABC, takže je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku. Strana ED rovnoběžníku $BCDE$ je rovněž rovnoběžná se stranou BC a má s ní shodnou délku. Úsečky UV a ED jsou tak rovnoběžné a je $|UV| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|ED|$.

Úhly DUV a EDU jsou střídavé, tedy shodné, podobně jsou shodné i úhly EVU a DEV. Trojúhelníky UVX a DEX jsou proto podobné a platí $|UX|/|XD| = |UV|/|ED| = \frac{1}{2}$. Protože úsečka UD je těžnicí trojúhelníku ABD, plyne odtud, že bod X je jeho těžištěm. Na přímce AX proto leží těžnice z vrcholu A trojúhelníku ABD, takže na ní leží i střed S protější strany BD.

Odtud již podle úvodního odstavce plyne, že přímka AX dělí rovnoběžník $ABCD$ na dvě (dokonce shodné) části téhož obsahu.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu, právě když prochází jeho průsečíkem úhlopříček (*středem rovnoběžníku*). [Rovnoběžník je středově souměrný, přímka procházející jeho středem ho tedy dělí na dvě shodné části. Naopak, nechť daná přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu. V případě, že prochází dvěma sousedními stranami, vytne trojúhelník, jehož obsah je nejvýše polovina obsahu čtyřúhelníku, rovnost nastane v případě úhlopříčky. Pokud přímka prochází protějšími stranami, vzniknou dva lichoběžníky se stejnou výškou, ty mají shodný obsah, právě když mají shodný součet základen.]
2. Zopakujte si základní vlastnosti těžnic a těžiště trojúhelníku.

D1. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE, CDE, BCE, jež označíme po řadě K, L, M, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
  a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.
  b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.
  [60–C–II–3]

D2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X. Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce. [61–A–III–4]

4. *Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$?*

Řešení. Nechť $r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ je rozklad přirozeného čísla r na součin prvočísel, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ kladná celá čísla. (Takový rozklad je až na pořadí prvočísel jednoznačný.) Každý dělitel d přirozeného čísla r je pak tvaru $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq a_1,\ 0 \leqq \alpha_2 \leqq a_2,\ \dots,\ 0 \leqq \alpha_k \leqq a_k. \tag{1}$$

Počet dělitelů tedy přesně odpovídá počtu možností, jak vybrat k-tici nezáporných celých čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ splňujících podmínky (1). Protože každé z čísel α_i můžeme vybrat právě $a_i + 1$ způsoby $(1 \leqq i \leqq k)$, je podle kombinatorického pravidla součinu počet dělitelů přirozeného čísla r roven

$$\tau(r) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1). \tag{2}$$

Uvědomme si, že každý z činitelů v (2) je větší než 1. Protože číslo m má 7 dělitelů (číslo 7 je prvočíslo), má m prvočíselný rozklad tvaru $m = p^6$. Podobně všechna čísla n s devíti děliteli mají prvočíselný rozklad $n = q_1^8$ nebo $n = q_1^2 q_2^2$, kde $q_1 \neq q_2$. Skutečně, $3 \cdot 3$ je jediný rozklad čísla 9 na činitele větší než 1.

Probereme teď všechny možnosti, majíce na paměti, že prvočíslo p se může rovnat jednomu z prvočísel q_i.

A. Případ $n = q_1^8$.
  a) Nechť $p \neq q_1$. Potom $mn = p^6 q_1^8$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $7 \cdot 9 = 63$ dělitelů.
  b) Nechť $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^8 = p^{14}$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě 15 dělitelů.

B. Případ $n = q_1^2 q_2^2$.

a) Nechť $q_1 \neq p \neq q_2$. Potom $mn = p^6 q_1^2 q_2^2$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ dělitelů.

b) Některé z prvočísel q_1, q_2 je rovno p. Protože v rozkladu čísla n jsou ve stejných mocninách, stačí rozebrat jeden z těchto případů, např. $p = q_1$. Potom $mn = p^6 p^2 q_2^2 = p^8 q_3^2$ je rozklad čísla mn na součin prvočísel. Číslo mn má v tomto případě $9 \cdot 3 = 27$ dělitelů.

Počet dělitelů čísla mn může být 15, 27 nebo 63. Příslušný počet dělitelů dostaneme, vezmeme-li např. $m = 64 = 2^6$ a čísla n rovná $256 = 2^8$, $100 = 2^2 5^2$ nebo $225 = 3^2 5^2$.

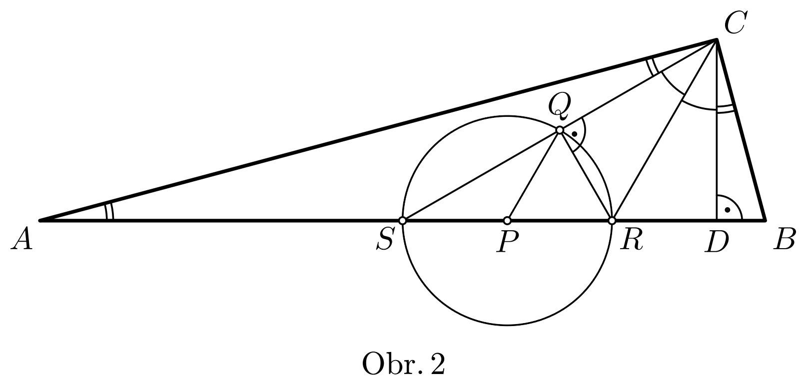
Návodné a doplňující úlohy:

1. Kolik kladných dělitelů mají čísla 24, 128 a 105? Kolik kladných dělitelů má součin každé dvojice těchto čísel? [Každé z čísel má 8 dělitelů, $24 \cdot 128$ má 22 dělitelů, $24 \cdot 105$ má 48 dělitelů, $128 \cdot 105$ má 64 dělitelů.]
2. Jaké jsou všechny možné rozklady čísla s 8 kladnými děliteli na součin prvočísel? [p_1^7, $p_1^3 p_2$, $p_1 p_2 p_3$.]
3. Určete nejmenší přirozené číslo s osmi kladnými děliteli. [Z výsledku předchozí úlohy plyne, že hledaným je číslo 24, nejmenší z čísel 2^7, $2^3 \cdot 3$ a $2 \cdot 3 \cdot 5$.]
4. Nechť $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$ je rozklad přirozeného čísla n na součin prvočísel. Dokažte, že potom má číslo n právě $\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_s + 1)$ kladných dělitelů.

D1. Označme $\tau(k)$ počet všech kladných dělitelů přirozeného čísla k a nechť n je řešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určete hodnotu podílu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$. [48–A–I–4]

5. *Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$.*

Řešení. O daném trojúhelníku ABC budeme předpokládat, že z jeho odvěsen AC a BC je delší ta první, a že tedy úhel BAC (vyznačený dvěma obloučky na obr. 2) je menší než 45°. V opačném případě stačí v celém řešení včetně závěrečné odpovědi navzájem vyměnit vrcholy A a B.



Obr. 2

Protože trojúhelník ASC je rovnoramenný (bod S je středem Thaletovy kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC), je $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BAC|$. Pravoúhlé trojúhelníky ABC a CBD se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B, jsou tedy podobné a plyne odtud shodnost úhlů BAC a BCD. Úhly ACS a BCD jsou tudíž shodné a menší než 45°, takže je do pravého úhlu ACB doplňuje nenulový úhel SCD, jehož osa je navíc shodná s osou celého úhlu ACB, což je polopřímka CR. Zároveň odtud plyne i shodnost úhlů SCR a DCR (a také to, že bod R leží mezi body S a D).

Označme P střed úsečky SR a Q patu kolmice z bodu R na přímku SC. Pravoúhlé trojúhelníky CQR a CDR s pravými úhly při vrcholech Q a D se shodují ve velikostech vnitřního úhlu při vrcholu C a v délce (společné) přepony CR, jsou proto shodné a podle předpokladu úlohy tak platí $|QR| = |DR| = \frac{1}{2}|SR| = |PR|$. To znamená, že trojúhelník PRQ je rovnostranný, takže $|\sphericalangle PRQ| = 60°$, $|\sphericalangle RSQ| = 30°$ a $|\sphericalangle SCD| = 60°$. Protože úhel při vrcholu C je pravý, vychází $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACS| = 15°$ a $|\sphericalangle ABC| = 75°$.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že CR je osou úhlu SCD. Tato osa dělí stranu SD trojúhelníku SCD ve stejném poměru, jako je poměr délek stran přilehlých k těmto úsekům (viz návodnou úlohu 1). Je tedy podle předpokladu úlohy

$$\sin|\sphericalangle CSD| = \frac{|CD|}{|CS|} = \frac{|RD|}{|RS|} = \frac{1}{2}.$$

Proto je velikost úhlu CSD rovna $30°$ a velikost úhlu BAC je $15°$ nebo $75°$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C protíná stranu AB v bodě R. Dokažte rovnost poměrů $|AC| : |BC| = |AR| : |BR|$. [Označme v velikost výšky trojúhelníku ABC procházející bodem C. Bod R leží na ose úhlu ACB, jeho vzdálenost od stran AC a BC je tedy stejná, označme ji r. Dvěma způsoby vyjádříme obsah trojúhelníku ARC, platí $\frac{1}{2}|AR|v = \frac{1}{2}|AC|r$. Podobně vyjádříme i obsah trojúhelníku BRC, platí $\frac{1}{2}|BR|v = \frac{1}{2}|BC|r$. Vydělením obou těchto rovností dostaneme požadovaný vztah.]
2. Pomocí velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku vyjádřete velikosti úhlů, které svírají výšky trojúhelníku s jednotlivými stranami a mezi sebou navzájem.
3. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný. [59–C–II–3]
4. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC. Sestrojte takový bod P, pro který přímka CP půlí úsečku KL. [58–B–S–1]
5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC. [54–B–II–3]

D1. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. [62–B–I–3]

D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [56–B–II–3]

D3. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $60°$. [59–A–I–4]

D4. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

6. *Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí*

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2} + \frac{1}{b^2-bc+c^2} + \frac{1}{c^2-ca+a^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Řešení. Nejprve dokážeme jednodušší nerovnost

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big) \tag{1}$$

pro libovolná dvě kladná čísla a, b. Jmenovatel prvního zlomku v (1) je zřejmě kladný, neboť

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 > 0.$$

Po vynásobení nerovnosti (1) kladnými jmenovateli všech zlomků na obou stranách dostaneme po úpravě ekvivalentní nerovnost

$$0 \leqq a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 = (a^3 - b^3)(a - b), \tag{1'}$$

která je zřejmě splněna, protože

a) v případě $a > b$ platí $a^3 > b^3$ a na pravé straně nerovnosti je součin dvou kladných reálných čísel;

b) v případě $a = b$ je na pravé straně nerovnosti nula;

c) v případě $a < b$ platí $a^3 < b^3$ a na pravé straně nerovnosti je součin dvou záporných reálných čísel.

Z této diskuse zároveň plyne, že rovnost nastane, právě když $a = b$.

Záměnou proměnných (a, b) v nerovnosti (1) proměnnými (b, c), (c, a) dostaneme postupně nerovnosti

$$\frac{1}{b^2 - bc + c^2} \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big), \tag{2}$$

$$\frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\Big), \tag{3}$$

v nichž nastane rovnost, právě když po řadě platí $b = c$ a $c = a$.

Sečtením nerovností (1), (2) a (3) tak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tedy právě když $a = b = c$.

Poznámka. Nerovnost (1′) můžeme dokázat řadou jiných postupů. Například ji můžeme upravit na ekvivalentní tvar

$$0 \leqq (a - b)^2(a^2 + ab + b^2),$$

nebo můžeme použít permutační nerovnost[1] pro souhlasně uspořádané dvojice (a, b), (a^3, b^3), nebo můžeme užít nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem[2] pro dvě čtveřice $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4)$ a $(\frac{1}{4}a^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4, \frac{1}{4}b^4)$ a výsledné nerovnosti sečíst, apod.

Z uvedeného postupu vyplývá, že dokazovaná nerovnost platí dokonce pro všechna *nenulová* reálná čísla a, b, c.

---

[1] Např. Herman J., Šimša J., Kučera R., *Metody řešení matematických úloh*, Masarykova univerzita Brno, 1996, str. 126–129.

[2] Např. Kufner A., Nerovnosti a odhady, *Škola mladých matematiků*, sv. 39, ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1989, kapitola I.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte nerovnost $a^2 - ab + b^2 > 0$ pro libovolná dvě reálná čísla a, b. [Nerovnost dostaneme jednoduchou úpravou na čtverec, nebo ukážeme že uvedený kvadratický trojčlen má v proměnné a záporný diskriminant.]
2. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla platí a, b platí nerovnosti
$$a^2 + b^2 \geqq 2ab, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2, \quad a^3 + b^3 \geqq a^2b + ab^2, \quad \frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big).$$
Kdy v nich nastane rovnost?
3. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí nerovnost
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big).$$
[Podle předcházející úlohy platí $\frac{1}{a+b} \leqq \frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$. Podobně platí i $\frac{1}{b+c} \leqq \frac{1}{4}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$ a $\frac{1}{c+a} \leqq \frac{1}{4}(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})$. Sečtením těchto tří nerovností dostaneme požadovanou nerovnost, ve které nastane rovnost, právě když nastane rovnost ve všech užitých nerovnostech, tj. v případě $a = b = c$.]
4. Určete všechny dvojice $(x; y)$ reálných čísel, které vyhovují nerovnici
$$(x + y)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big) \geqq \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big)^2.$$
[63–B–I–2]
5. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí
$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$
a pro každou z obou nerovnosti zjistěte, kdy přechází v rovnost. [59–C–I–5]
6. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost
$$\Big(a + \frac{1}{b}\Big) + \Big(b + \frac{1}{c}\Big) + \Big(c + \frac{1}{a}\Big) \geqq 8.$$
Zjistěte, kdy nastane rovnost. [55–B–S–1]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big)}.$$
[49–A–II–3]

D2. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z kladných čísel platí nerovnost
$$\sqrt{xyz}\Big(\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}\Big) \leqq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$
Zjistěte, kdy nastane rovnost. [47–B–I–3]

D3. Dokažte, že pro každou trojici x, y, z nezáporných čísel platí nerovnost
$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{zx}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0.$$
Zjistěte, kdy platí rovnost. [17–A–II–2]