Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Určete všechny dvojice* (x, y) *reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic*

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4-y,\\ \sqrt{(y-4)^2} &= x+8.\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ. Vzhledem k tomu, že pro každé reálné číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$, je daná soustava rovnic ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned}|x+4| &= 4-y,\\ |y-4| &= x+8.\end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že musí být $4 - y \geqq 0$, tedy $y \leqq 4$. Ve druhé rovnici lze tudíž odstranit absolutní hodnotu. Dostaneme tak

$$|y-4| = 4-y = x+8, \quad \text{tj.} \quad -y = x+4.$$

Po dosazení za $x + 4$ do první rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4-y.$$

Protože $y \leqq 4$, budeme dále uvažovat dva případy.

Pro $0 \leqq y \leqq 4$ řešíme rovnici $y = 4 - y$, a tedy $y = 2$. Nalezené hodnotě $y = 2$ odpovídá po dosazení do druhé rovnice $x = -6$.

Pro $y < 0$ dostaneme rovnici $-y = 4 - y$, která však nemá řešení.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě jedno řešení, a to $(x, y) = (-6, 2)$.

JINÝ ZPŮSOB ŘEŠENÍ. Odstraněním absolutních hodnot v obou rovnicích, tj. rozborem čtyř možných případů, kdy

a) $(x + 4 \geqq 0) \wedge (y - 4 \geqq 0)$, tj. $(x \geqq -4) \wedge (y \geqq 4)$,
b) $(x + 4 \geqq 0) \wedge (y - 4 < 0)$, tj. $(x \geqq -4) \wedge (y < 4)$,
c) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geqq 0)$, tj. $(x < -4) \wedge (y \geqq 4)$,
d) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$, tj. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,

zjistíme, že případy a), b), c) neposkytují (s ohledem na uvedená omezení v jednotlivých případech) žádné reálné řešení. V případě d) pak dostaneme jediné řešení $(x, y) = (-6, 2)$ dané soustavy.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:
   a) $|x| = x + 2$ [$x = -1$]
   b) $|2x + 2| = x + 4$ [$x = -2$, $x = 2$]
   c) $|x - 1| = |x| - 1$ [$x \geqq 1$]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:
   a) $|x + 2| = y - 1$, $|y - 5| = -x$ [$x = -3$, $y = 2$]
   b) $|x - 1| = y$, $|x - 2| = y + 2$ [soustava nemá řešení]
   c) $|x| = y + 1$, $x = |y| + 1$ [$x \geqq 1$, $y \geqq 0$]

2. *Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.*

ŘEŠENÍ. Představme si klasický ciferník s čísly 1–12. Bez újmy na obecnosti si představme, že na začátku jsou všechny tři ručičky na čísle 12.

Pootočí-li se 15minutová ručička o úhel α, pootočí se 3minutová ručička o úhel 5α a minutová ručička o úhel 15α. Jelikož každé dvě ručičky v hledaných polohách spolu svírají úhel $120°$ a 3minutá ručička je rychlejší než 15minutová, dají se hledané polohy získat jako řešení rovnice $5\alpha - \alpha = k \cdot 120°$, kterými jsou úhly $\alpha = k \cdot 30°$, kde k nabývá kladných celých hodnot, jež nejsou násobky tří, jinak by se dotyčné ručičky překrývaly.

Můžeme tedy postupovat tak, že budeme testovat hodnoty $\alpha = k \cdot 30°$ postupně pro jednotlivé hodnoty čísla k. Skutečně tak začněme a průběžně uvidíme, jak se dají po několika krocích díky periodičnosti získat všechna další řešení dané úlohy.

Uvažujme nejprve $k = 1$, tedy $\alpha = 30°$. Při této hodnotě se pootočila nejrychlejší ručička o úhel $450°$. V tomto okamžiku se nejpomalejší ručička nachází na čísle 1 ciferníku, druhá ručička na čísle 5 a nejrychlejší ručička na čísle 3. Tento případ tedy není řešením dané úlohy.

Nechť je dále $k = 2$ neboli $\alpha = 60°$. Při této hodnotě se pootočila nejrychlejší ručička o úhel $900°$. V tomto okamžiku se nejpomalejší ručička nachází na čísle 2 ciferníku, druhá ručička na čísle 10 a nejrychlejší ručička na čísle 6. Tento případ je tedy jedním řešením dané úlohy.

Vidíme, že můžeme sestavit tabulku, z níž jednoduše vyčteme všechna řešení:

	polohy příslušné ručičky na ciferníku				
	15minutová	3minutová	minutová	je řešením?	čas
$k = 1$	1	5	3	ne	1,25 min
$k = 2$	2	10	6	*ano*	$2 \cdot 1{,}25$ min
$k = 4$	4	8	12	*ano*	$4 \cdot 1{,}25$ min
$k = 5$	5	1	3	ne	
$k = 7$	7	11	9	ne	
$k = 8$	8	4	12	*ano*	$8 \cdot 1{,}25$ min
$k = 10$	10	2	6	*ano*	$10 \cdot 1{,}25$ min
$k = 11$	11	7	9	ne	
$k = 12$	12	12	12	ne	

Do tabulky jsme uvedli i „zakázanou“ hodnotu $k = 12$ dělitelnou třemi, při které se všechny tři ručičky překryjí, takže v dalším průběhu se budou jejich polohy periodicky opakovat. Časy, ve kterých to nastane, budou vždy o 15 minut delší. Zjistili jsme tak, že všechny hledané časy jsou

$$
\begin{aligned}
t &= (12n + 2) \cdot 1{,}25 \text{ min} = (15n + 2{,}5) \text{ min},\\
t &= (12n + 4) \cdot 1{,}25 \text{ min} = (15n + 5) \text{ min},\\
t &= (12n + 8) \cdot 1{,}25 \text{ min} = (15n + 10) \text{ min},\\
t &= (12n + 10) \cdot 1{,}25 \text{ min} = (15n + 12{,}5) \text{ min},
\end{aligned}
$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jaký úhel spolu svírají hodinová a minutová ručička v 1:30 na ciferníku
   a) s 12 čísly, [135°]
   b) s 24 čísly? [157,5°]
2. Na ciferníku s 12 čísly najděte všechny časy, kdy budou hodinová a minutová ručička svírat úhel 120° v intervalu
   a) 0–12 hodin, [$\frac{4}{11}$ h, $2 \cdot \frac{4}{11}$ h, $4 \cdot \frac{4}{11}$ h, $5 \cdot \frac{4}{11}$ h, $7 \cdot \frac{4}{11}$ h, $8 \cdot \frac{4}{11}$ h, $10 \cdot \frac{4}{11}$ h, $11 \cdot \frac{4}{11}$ h, $13 \cdot \frac{4}{11}$ h, $14 \cdot \frac{4}{11}$ h, $16 \cdot \frac{4}{11}$ h, $17 \cdot \frac{4}{11}$ h, $19 \cdot \frac{4}{11}$ h, $20 \cdot \frac{4}{11}$ h, $22 \cdot \frac{4}{11}$ h, $23 \cdot \frac{4}{11}$ h, $25 \cdot \frac{4}{11}$ h, $26 \cdot \frac{4}{11}$ h, $28 \cdot \frac{4}{11}$ h, $29 \cdot \frac{4}{11}$ h, $31 \cdot \frac{4}{11}$ h, $32 \cdot \frac{4}{11}$ h]
   b) 0–∞ hodin. [$(3n+1) \cdot \frac{4}{11}$ h, $(3n+2) \cdot \frac{4}{11}$ h, $n = 0, 1, 2, \ldots$]

3. *Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leqq k \leqq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.*

Řešení. Řešení rozdělme podle hodnoty čísla k.

Je-li $k = 0$, je počet kostek pokrývajících dva křížky roven nule, proto vyhraje Simona.

Je-li $0 < k \leqq 32$, umístí Simona křížky např. jen na bílá pole šachovnice. Pak pod žádnou kostkou nejsou dva křížky, proto vyhraje Simona.

Je-li $k > 32$, k sudé, umístí Simona 32 křížků na bílá pole a zbylé křížky kamkoli. Pak pod sudým počtem kostek jsou dva křížky (takových kostek je totiž právě $k - 32$, protože každá dominová kostka pokrývá jedno bílé a jedno černé pole šachovnice), takže vyhraje Simona.

Je-li $32 < k \leqq 61$, k liché, nenapíše Simona křížky do tří polí v jednom z „bílých rohů“, tj. do rohového bílého a do dvou sousedních černých polí, ale napíše je do všech ostatních 31 bílých polí a zbytek do jakýchkoli černých polí (kromě zmíněných dvou). Na bílých polích je tedy lichý počet křížků a na černých sudý počet křížků. Kolem každého černého pole s křížkem jsou všechna bílá pole také s křížkem, proto každá kostka, která zakrývá černé pole s křížkem, zakrývá dva křížky. Jiné kostky dva křížky nezakrývají. Proto opět vyhraje Simona.

Je-li $k = 63$, nejsou dva křížky jen pod jedinou kostkou, proto v takovém případě vyhraje Lenka, a to bez potřeby jakékoli strategie.

Shrnutí: Pro každé $0 \leqq k \leqq 64$, $k \neq 63$, má vítěznou strategii Simona, při $k = 63$ vítězí automaticky Lenka.

Návodné a doplňující úlohy:

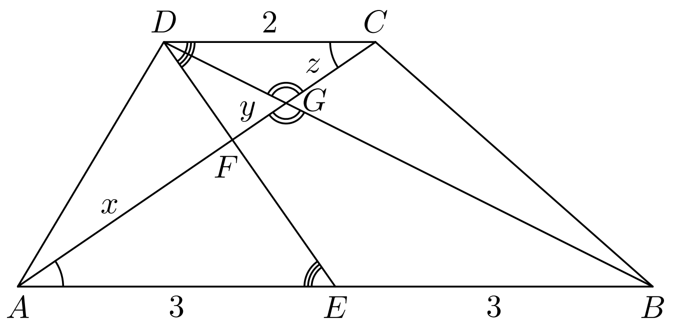
1. Řešte danou úlohu pro šachovnice 2×2 a 4×4.
2. Jak se změní výsledek dané úlohy, budeme-li místo dvou křížků pod kostkou uvažovat podmínku, že pod kostkou není ani jeden křížek?
3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leqq k \leqq 9$, vybere Simona k políček šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatní políčka napíše číslo 0. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem pokryje třemi triminovými kostkami, tj. kostkami tvaru 3×1, a čísla pod jejími políčky vynásobí. Je-li počet kostek se součinem 0 lichý, vyhrává Simona, jinak vyhrává Lenka. V závislosti na k určete, kolikaprocentní vítěznou strategii má Simona. [80%]

4. *Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr*

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

Řešení. Jelikož v zadání i v otázce úlohy jsou jen poměry, můžeme si délky stran lichoběžníku zvolit jako vhodná konkrétní čísla. Zvolme tedy např. $|AB| = 6$, pak $|AE| = |BE| = 3$ a $|CD| = 2$. Hledané délky označme $|AF| = x$, $|FG| = y$, $|GC| = z$. Tyto délky jsme vyznačili na obr. 1 stejně jako tři dvojice shodných úhlů, které nyní využijeme k úvahám o trojúhelnících podobných podle věty *uu*.

Trojúhelníky ABG a CDG jsou podobné, proto $(x + y) : z = 6 : 2 = 3 : 1$. Také trojúhelníky AEF a CDF jsou podobné, proto $x : (y + z) = 3 : 2$.



Obr. 1

Odvozené úměry zapíšeme jako soustavu rovnic

$$x + y - 3z = 0,$$
$$2x - 3y - 3z = 0.$$

Jejich odečtením získáme rovnost $x = 4y$ neboli $x : y = 4 : 1$. Dosazením tohoto výsledku do první rovnice dostaneme $5y = 3z$ neboli $y : z = 3 : 5$. A spojením obou poměrů získáme výsledek $x : y : z = 12 : 3 : 5$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Lichoběžník $ABCD$ má základny o délkách $|AB| = a$, $|CD| = c$, jeho úhlopříčky se protínají v bodě U.
   a) Dokažte, že trojúhelníky ABU a CDU jsou podobné a určete poměr podobnosti. Jaký je poměr obsahů těchto trojúhelníků? [$a^2 : c^2$]
   b) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ADU a BCU jsou stejné.
2. Je $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$. Určete $a : b : c : d$. [15 : 30 : 40 : 48]

5. *Rozdíl dvou přirozených čísel je 2 010 a jejich největší společný dělitel je 2 014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.*

Řešení. Označme hledaná čísla a a b $(a > b)$ a d jejich největší společný dělitel. Pak $a = md$, $b = nd$, kde $m > n$ jsou nesoudělná čísla. Protože nejmenší společný násobek čísel a, b je číslo mnd, dosazením do zadaných vztahů dostaneme rovnosti

$$a - b = (m - n)d = 2\,010,$$
$$mnd = 2\,014d \quad \text{neboli} \quad mn = 2\,014.$$

Podle rozkladu na prvočinitele $2\,014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všechny možné dvojice (m, n) a pro každou z nich se přesvědčíme, zda číslo $m - n$ je dělitelem čísla $2\,010$.

V kladném případě příslušný podíl udává číslo d a výpočet neznámých $a = md$ a $b = nd$ je nasnadě:

a) $m = 2\,014$ a $n = 1$: $m - n = 2\,013$ nedělí $2\,010$;

b) $m = 19 \cdot 53 = 1\,007$ a $n = 2$: $m - n = 1\,005 \mid 2\,010$, $d = 2$, $a = 1\,007 \cdot 2 = 2\,014$, $b = 2 \cdot 2 = 4$;

c) $m = 2 \cdot 53 = 106$ a $n = 19$: $m - n = 87$ nedělí $2\,010$;

d) $m = 53$ a $n = 2 \cdot 19 = 38$: $m - n = 15 \mid 2\,010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7\,102$, $b = 38 \cdot 134 = 5\,092$.

Závěr: Hledaná čísla tvoří jednu z dvojic $(2\,014, 4)$ nebo $(7\,102, 5\,092)$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechny dělitele čísla 2 014. $[1, 2, 19, 38, 53, 106, 1\,007, 2\,014]$
2. Rozdíl dvou přirozených čísel je 5 a jejich největší společný dělitel je 6krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete obě takové dvojice čísel.
3. Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla a, b a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n platí $ab = nD$.
4. Platí pro každá tři přirozená čísla a, b, c a jejich největšího společného dělitele D a jejich nejmenší společný násobek n rovnost $abc = nD$?
5. Mají-li přirozená čísla a, b největšího společného dělitele D, mají stejného největšího společného dělitele i čísla a, b, $a - b$, $a + b$. Dokažte. Platí stejné tvrzení pro nejmenší společný násobek?

6. *Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.*

Řešení. Označme a nejbližší větší přirozené číslo k iracionálnímu číslu $\sqrt{n}$. Podle zadání pak platí $a - 0{,}01 \leqq \sqrt{n}$. Protože a^2 je přirozené číslo větší než n, musí dohromady platit

$$(a - 0{,}01)^2 \leqq n \leqq a^2 - 1.$$

Po úpravě nerovnosti mezi krajními výrazy vyjde

$$\frac{1}{50} a \geqq 1{,}000\,1 \quad \text{neboli} \quad a \geqq 50{,}005.$$

Jelikož je číslo a celé, plyne odtud $a \geqq 51$. A protože

$$(51 - 0{,}01)^2 = 2\,601 - \frac{102}{100} + \frac{1}{100^2} \in (2\,599, 2\,600),$$

je hledaným číslem $n = 2\,600$.

Poznámka. Za správné řešení lze uznat i řešení pomocí kalkulačky. Mají-li totiž být za desetinnou čárkou dvě devítky, musí být číslo n hodně blízko zleva k nějaké druhé mocnině. Proto stačí na kalkulačce vyzkoušet čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ atd. Jelikož je $51^2 = 2\,601$, najdeme, že $\sqrt{2\,600} = 50{,}990\,195\ldots$

Pracnější úlohou by bylo najít nejmenší číslo n, pro něž za desetinnou čárkou iracionálního čísla $\sqrt{n}$ jsou dvě osmičky, či dvě sedmičky apod.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Není-li přirozené číslo n druhou mocninou jiného přirozeného čísla, dokažte, že $\sqrt{n}$ je číslo iracionální.
2. Najděte pomocí kalkulačky nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka. $[\sqrt{35} = 5{,}916\,079\ldots]$
3. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následuje bezprostředně za desetinnou čárkou devítka.
4. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě nuly. $[\sqrt{2\,501} = 50{,}009\,999\ldots]$
5. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla $\sqrt{n}$ následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě stejné cifry. [na kalkulačce $\sqrt{43} = 6{,}557\,438\ldots$]