**64. ročník matematické olympiády**

# Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

**1.** Předpokládejme, že přirozené číslo $a$ má 15 kladných dělitelů. Kolik jich může mít přirozené číslo $b$, když nejmenší společný násobek čísel $a$ a $b$ má 20 kladných dělitelů?

**2.** Označme $P$ průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Vypočtěte jeho obsah, jestliže obsahy trojúhelníků $ABC$, $BCD$ a $DAP$ jsou po řadě $8\,\mathrm{cm}^2$, $9\,\mathrm{cm}^2$, $10\,\mathrm{cm}^2$.

**3.** Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a$, $b$, $c$ platí

$$\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{ca}{c^2-ca+a^2}\leqq 3.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

**ve čtvrtek 22. ledna 2015**

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

# 64. ročník matematické olympiády

*Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B*

**1.** V domácím kole jsme ukázali, že přirozené číslo, jehož rozklad na součin prvočísel je $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ přirozená čísla, má právě $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$ kladných dělitelů.

Existuje jediný rozklad čísla 15 na součin několika přirozených čísel větších než 1, a to $15 = 3 \cdot 5$. Jelikož číslo $a$ má 15 dělitelů, je jeho rozklad na součin prvočísel tvaru

$$p_1^{14} \quad \text{nebo} \quad p_2^2 p_3^4,$$

kde $p_1$, $p_2 \neq p_3$ jsou prvočísla. Všechny rozklady čísla 20 na součin několika přirozených čísel větších než 1 jsou $20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Jelikož nejmenší společný násobek $n$ obou čísel $a$ a $b$ má 20 dělitelů, je jeho rozklad na prvočinitele tvaru

$$q_1^{19}, \quad q_2 q_3^9, \quad q_4^3 q_5^4 \quad \text{nebo} \quad q_6 q_7 q_8^4,$$

kde $q_1$, $q_2 \neq q_3$, $q_4 \neq q_5$, $q_6 \neq q_7 \neq q_8 \neq q_6$ jsou prvočísla.

Číslo $a$ je však zároveň dělitelem čísla $n$. To nastane pouze v následujících případech:

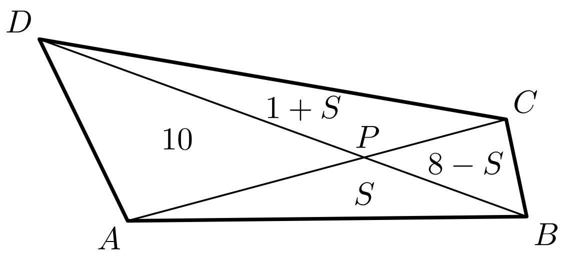
a) $p_1 = q_1$, tedy $a = p_1^{14}$ a $n = p_1^{19}$. Vyhovuje pouze $b = p_1^{19}$, a číslo $b$ má tedy právě 20 kladných dělitelů.

b) $p_2 = q_4$ a $p_3 = q_5$, tedy $a = p_2^2 p_3^4$ a $n = p_2^3 p_3^4$, tudíž $b = p_2^3 p_3^\alpha$, kde $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Číslo $b$ má v tomto případě $4(1+\alpha)$ dělitelů, což jsou všechna čísla z množiny $\{4, 8, 12, 16, 20\}$.

*Závěr.* Číslo $b$ může mít 4, 8, 12, 16 nebo 20 dělitelů.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za výpis všech možností prvočíselného rozkladu čísel $a$ a $n$ udělte po 1 bodu, za nalezení všech možností, kdy $a \mid n$ udělte 1 bod, za nalezení všech možných tvarů čísla $b$ udělte v případech a) a b) po 1 bodu a konečně 1 bod udělte za určení všech možných počtů dělitelů čísla $b$. Řešení, ve kterém je jeden z případů a) nebo b) opomenut, oceňte nejvýše 2 body.

**2.** Označme $S_{XYZ}$ obsah trojúhelníku $XYZ$ vyjádřený v $\mathrm{cm}^2$ a dále označme $S = S_{ABP}$. Podle zadání platí $S_{ADP} = 10$, $S + S_{BCP} = 8$, $S_{BCP} + S_{CDP} = 9$. Z druhé rovnosti plyne $S_{BCP} = 8 - S$, dosazením do třetí rovnosti pak vyjde $S_{CDP} = 1 + S$ (obr. 1).




Obr. 1

Trojúhelníky $ABP$ a $ADP$ mají shodnou výšku z vrcholu $A$. Pro poměr jejich obsahů proto platí $S : S_{ADP} = |BP| : |DP|$. Podobně pro trojúhelníky $BCP$ a $CDP$ dostaneme $S_{BCP} : S_{CDP} = |BP| : |DP|$. Odtud již plyne $S : S_{ADP} = S_{BCP} : S_{CDP}$, což vzhledem k odvozeným vztahům znamená

$$\frac{S}{10} = \frac{8-S}{1+S}.$$

Po úpravě pak dostaneme pro $S$ kvadratickou rovnici

$$S^2 + 11S - 80 = (S + 16)(S - 5) = 0,$$

jež má dva kořeny $-16$ a $5$. Protože obsah $S$ trojúhelníku $ABP$ je nezáporné číslo, vyhovuje pouze $S = 5$. Odtud již snadno dopočteme z výše uvedených vztahů $S_{BCP} = 3$ a $S_{CDP} = 6$. Obsah celého čtyřúhelníku $ABCD$ vyjádřený v $\mathrm{cm}^2$ tak je

$$S + S_{BCP} + S_{CDP} + S_{ADP} = 5 + 3 + 6 + 10 = 24.$$

*Závěr.* Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je $24\,\mathrm{cm}^2$.

**Jiné řešení.** Délky úseček $PA$, $PB$, $PC$, $PD$ (vyjádřené v cm) označíme po řadě $a$, $b$, $c$, $d$. Podle známého vzorce $S = \frac{1}{2}uv\sin\omega$ pro obsah trojúhelníku, jehož strany délek $u$ a $v$ svírají úhel velikosti $\omega$, vyjádříme podmínky úlohy rovnostmi

$$8 = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}bc\sin(\pi - \varphi), \quad 9 = \frac{1}{2}bc\sin(\pi - \varphi) + \frac{1}{2}cd\sin\varphi, \quad 10 = \frac{1}{2}da\sin(\pi - \varphi),$$

kde $\varphi = |\sphericalangle APB|$. Kvůli jednodušším zápisům položíme $k = \frac{1}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(\pi - \varphi)$. Dostaneme tak soustavu rovnic

$$8 = kab + kbc, \quad 9 = kbc + kcd, \quad 10 = kda, \tag{1}$$

z níž budeme hledat obsah $S$ čtyřúhelníku $ABCD$, který bude v $\mathrm{cm}^2$ vyjádřen vzorcem

$$S = kab + kbc + kcd + kda. \tag{2}$$

Nejprve vhodnou kombinací druhé a třetí rovnice (1) vyloučíme $d$:

$$9a - 10c = kabc. \tag{3}$$

Kombinací této rovnice s první rovnicí (1), jejíž pravou stranu upravíme na součin $kb(a + c)$, vyloučíme $b$:

$$(9a - 10c)(a + c) - 8ac = 0.$$

Díky identitě

$$(9a - 10c)(a + c) - 8ac = 9a^2 - 9ac - 10c^2 = (3a - 5c)(3a + 2c)$$

tak vidíme, že pro (kladná) čísla $a$, $c$ platí $3a = 5c$ neboli $9a = 15c$, a proto rovnost (3) lze přepsat jako $5c = kabc$, odkud $kab = 5$. Z rovností (1) pak plyne $kbc = 3$ a $kcd = 6$, což vše po dosazení do (2) spolu s hodnotou $kda = 10$ vede k výsledku $S = 24$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyjádření obsahu pomocí jednoho ze tří trojúhelníků $ABP$, $BCP$ či $CDP$, 2 body za zdůvodnění úměry mezi obsahy čtyř trojúhelníků, 1 bod za sestavení odpovídající rovnice a 1 bod za její vyřešení. Pokud řešitel správně vypočte obsah pouze pro speciálně zvolený vyhovující čtyřúhelník $ABCD$ (například s navzájem kolmými úhlopříčkami), udělte nejvýše 2 body.

**3.** Nejprve dokážeme pro libovolná $a, b > 0$ jednodušší nerovnost

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \leqq 1. \tag{1}$$

Jmenovatel zlomku na levé straně je zřejmě kladný, neboť

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 > 0.$$

Pokud jím tedy vynásobíme obě strany této nerovnosti, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$ab \leqq a^2 - ab + b^2,$$

která je ekvivalentní se zřejmou nerovností $0 \leqq (a - b)^2$. Proto platí i nerovnost (1) a rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.

Záměnnou proměnných $(a, b)$ v nerovnosti (1) proměnnými $(b, c)$, $(c, a)$ dostaneme postupně nerovnosti

$$\frac{bc}{b^2 - bc + c^2} \leqq 1, \tag{2}$$

$$\frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leqq 1, \tag{3}$$

v nichž nastane rovnost, právě když po řadě platí $b = c$ a $c = a$.

Sečtením nerovností (1), (2) a (3) pak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \leqq 3.$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tj. právě když $a = b = c$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování, že stačí dokázat nerovnost (1), udělte 2 body, za její úplný důkaz či odkaz na šestou úlohu domácího kola udělte další dva body. Pokud student opomene zmínit, že jmenovatel zlomku na levé straně je kladný, strhněte 1 bod.