64. ročník matematické olympiády
III. kolo kategorie A

Praha, 22.–25. března 2015

1. *Najděte všechna čtyřmístná čísla n taková, že zároveň platí:*

i) číslo n je součinem tří různých prvočísel;

ii) součet nejmenších dvou z těchto prvočísel je roven rozdílu největších dvou z nich;

iii) součet všech tří prvočísel je roven druhé mocnině jiného prvočísla.

(Radek Horenský)

Řešení. Předpokládejme, že n splňuje zadané podmínky, tedy $n = p \cdot q \cdot r$, přičemž $p < q < r$ jsou prvočísla.

Z druhé podmínky vyplývá $p + q = r - q$, tj. $r = p + 2q$. Prvočíslo r je liché, proto je $p \neq 2$.

Podle třetí podmínky je $p + q + r = 2p + 3q = s^2$, kde s je prvočíslo. Možnost $s = 3$ očividně nevyhovuje (součet tří různých prvočísel je totiž větší než 9), proto s^2 není dělitelné třemi, a tedy $p \neq 3$.

Z rovnosti $2p + 3q = s^2$ rovněž vyplývá, že číslo $2p$ dává při dělení třemi zbytek 1, protože ať už dává s při dělení třemi zbytek 1 či 2, v obou případech dává s^2 při dělení třemi zbytek 1. Prvočíslo p tedy dává při dělení třemi zbytek 2. Vypišme od nejmenších několik prvočísel, která jsme zatím nevyloučili jako možné hodnoty p:

$$p \in \{5, 11, 17, 23, 29, 41, \ldots\}.$$

Pokud je $p \geqq 17$, vyjde $q \geqq 19$ a $r = p + 2q \geqq 55$, čili

$$n = pqr \geqq 17 \cdot 19 \cdot 55 > 15 \cdot 15 \cdot 50 = 225 \cdot 50 > 200 \cdot 50 = 10\,000,$$

což odporuje předpokladu, že n je čtyřmístné.[1] Zbývá tedy vyšetřit $p \in \{5, 11\}$.

Pokud $p = 11$, z rovnosti $2p + 3q = s^2$ máme $q = \frac{1}{3}(s^2 - 22)$. Následující tabulka udává hodnoty q pro nejmenší prvočíselné hodnoty s (zřejmě musí být $s^2 > 22$, tedy $s \geqq 5$):

s	5	7	11	13	17	19	...
q	1	9	33	49	89	113	...

Hodnoty q s rostoucím s zřejmě rostou. Vidíme, že pro $s \leqq 13$ nevychází q prvočíselné. Pro hodnoty $s \geqq 17$ je $q > 50$, takže

$$n = pqr = 11q(11 + 2q) > 11 \cdot 50 \cdot 111 > 10 \cdot 50 \cdot 100 = 50\,000.$$

Čtyřmístné hodnoty n tedy pro $p = 11$ nedostaneme.

Pokud $p = 5$, máme $q = \frac{1}{3}(s^2 - 10)$. Sestrojíme podobnou tabulku jako výše:

s	5	7	11	13	17	19	...
q	5	13	37	53	93	117	...

Případ $q = 5$ nevyhovuje podmínce $p < q$. Pro $s = 7$ vyjde $q = 13$ a $r = 31$, dostáváme tedy vyhovující hodnotu $n = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2\,015$ (13 i 31 jsou skutečně prvočísla). Pro $s \geqq 11$ je $q \geqq 37$, čili

$$n = pqr = 5q(5 + 2q) \geqq 5 \cdot 37 \cdot 79 > 5 \cdot 30 \cdot 70 = 10\,500.$$

Žádné další řešení proto nedostaneme.

[1] Mohli jsme samozřejmě rovnou napsat $n = pqr \geqq 17 \cdot 19 \cdot 55 = 17\,765$. Uvedený výpočet jen demonstruje, jak potřebný odhad $n \geqq 10\,000$ odvodit bez pracného násobení.

Odpověď. Jediným možným řešením je $p = 5$, $q = 13$ a $r = 31$, tj. $n = 2\,015$.

Poznámka. Pro zajímavost poznamenejme, že jediné pětimístné resp. šestimístné číslo vyhovující daným třem podmínkám je $n = 5 \cdot 37 \cdot 79 = 14\,615$, resp. $29 \cdot 37 \cdot 103 = 110\,519$.

Kdyby s nemuselo být prvočíslo, jediné další vyhovující číslo menší než $1\,000\,000$ by bylo $n = 3 \cdot 73 \cdot 149 = 32\,631$.

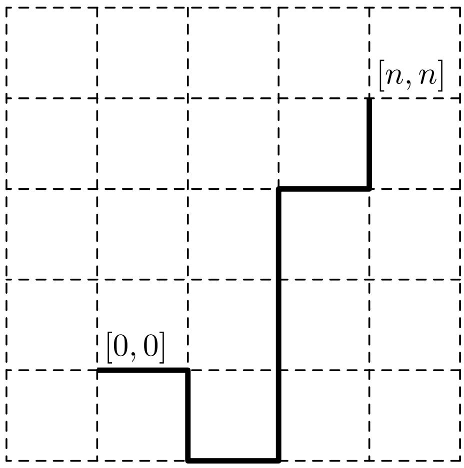
---

2. *Pro dané přirozené číslo n určete počet cest délky $2n+2$ z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$, které žádným bodem neprocházejí vícekrát. Cestou délky $2n+2$ z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$ rozumíme $(2n+2)$-člennou posloupnost*

$$(A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n+1}A_{2n+2})$$

úseček spojujících dva sousední mřížové body, přičemž $A_0 = [0,0]$, $A_{2n+2} = [n,n]$.

(Pavel Novotný)



Řešení. Souřadnicovou soustavu mějme orientovánu standardně, tedy tak, že x-ová osa směřuje zleva doprava a y-ová zdola nahoru. V tomto kontextu budeme v řešení pro příslušné směry používat slova „doleva“, „doprava“, „nahoru“ a „dolů“.

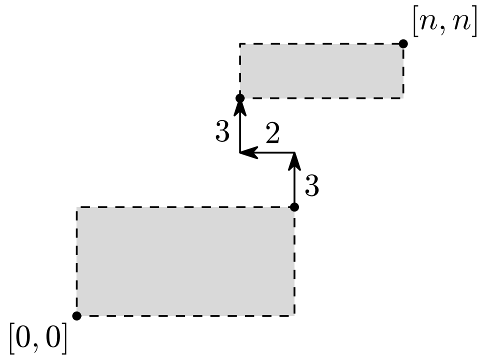
Každá cesta z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$ musí obsahovat alespoň n kroků směrem doprava a alespoň n kroků nahoru. Kromě těchto $2n$ kroků musí cesta délky $2n+2$ obsahovat ještě dva kroky, které mají navzájem opačný směr. Vzhledem k tomu se každá cesta délky $2n+2$ dá realizovat právě jedním ze dvou způsobů:

a) $n+1$ kroků doprava, jeden krok doleva, n kroků nahoru;
b) $n+1$ kroků nahoru, jeden krok dolů, n kroků doprava.

Vzhledem k symetrii je zřejmé, že obě možnosti obsahují stejný počet cest, proto se budeme zabývat pouze možností a). Krok doprava označíme číslem 1, krok doleva číslem 2, krok nahoru číslem 3. Hledáme počet $(2n+2)$-členných posloupností, které obsahují $n+1$ jednotek, jednu dvojku a n trojek. Jednotky můžeme umístit $\binom{2n+2}{n+1}$ způsoby a dvojku na některé z $n+1$ zbývajících míst, proto je počet takových posloupností

$$(n+1)\binom{2n+2}{n+1}.$$

Musíme ale odečíst počet těch posloupností, v nichž následuje dvojka bezprostředně za jednotkou nebo bezprostředně před jednotkou — právě takové posloupnosti totiž příslušejí těm cestám, kterými projdeme některou úsečku nejméně dvakrát. Opravdu, pokud jednotka v posloupnosti sousedí s dvojkou, znamená to, že jsme po cestě šli ve dvou po sobě jdoucích krocích doprava a doleva (nebo naopak), prošli jsme tedy tutéž úsečku dvakrát. Naopak, pokud dvojka (která je v posloupnosti jediná) nesousedí s jednotkou, je v posloupnosti před ní i za ní trojka (případně z některé strany není žádné číslo, pokud dvojkou posloupnost začíná nebo končí), takže celá část cesty před krokem doleva se nachází níže a celá část cesty po kroku doleva se nachází výše než úsečka, po níž jsme prošli doleva (obr. 1). Tyto dvě části jsou proto disjunktní, a protože obě již obsahují jen kroky nahoru a doprava, po žádné úsečce v nich více než jednou určitě neprojdeme.



Obr. 1

Jednotku a hned za ní dvojku můžeme umístit $2n+1$ způsoby a zbývající jednotky na volná místa $\binom{2n}{n}$ způsoby. Počet posloupností, ve kterých je dvojka bezprostředně za jednotkou, je tedy

$$(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Stejný je počet posloupností, ve kterých je dvojka bezprostředně před jednotkou. Posloupnosti, v nichž je trojice po sobě jdoucích členů 1, 2, 1 (ty příslušejí cestám, po kterých některou úsečku projdeme třikrát po sobě) jsou započítány v obou případech, musíme je tedy jednou odečíst. Jejich počet je $2n\binom{2n-1}{n-1}$.

Počet vyhovujících cest typu a) je tudíž

$$\begin{aligned}(n+1)\binom{2n+2}{n+1} &- 2(2n+1)\binom{2n}{n} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = \\ &= \frac{(n+1)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} - \frac{2(2n+1)(2n)!}{n!\cdot n!} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = \\ &= \frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} - \frac{(2n+2)!}{n!(n+1)!} + 2n\binom{2n-1}{n-1} = 2n\binom{2n-1}{n-1}\end{aligned}$$

a počet všech cest obou typů a) i b) je tak dvojnásobek, tedy $4n\binom{2n-1}{n-1}$.

Jiné řešení. Při označení z prvního řešení přípustné cestě typu a) přísluší, jak jsme tam dokázali, právě ta posloupnost, v níž nejsou vedle sebe jednotka a dvojka. To znamená, že posloupnost buď obsahuje blok 323, nebo začíná blokem 23, nebo končí blokem 32. Odstraněním bloku 323 vznikne $(2n-1)$-členná posloupnost obsahující $n+1$ jednotek a $n-2$ trojek. Počet takových posloupností je $\binom{2n-1}{n+1}$ a blok 323 můžeme přidat ke každé $2n$ způsoby. Odstraněním počátečního bloku 23 nebo koncového bloku 32 vznikne $2n$-členná posloupnost obsahující $n+1$ jednotek a $n-1$ trojek. Počet takových posloupností je $\binom{2n}{n+1}$ a ke každé můžeme přidat na začátek blok 23 nebo na konec blok 32.

Počet cest typu a) je proto

$$2n \cdot \binom{2n-1}{n+1} + 2 \cdot \binom{2n}{n+1} = \frac{2n(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} + \frac{2 \cdot (2n)!}{(n+1)!(n-1)!} =$$
$$= \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-2)!}\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = \frac{(2n)!}{(n+1)n!(n-2)!} \cdot \frac{n+1}{n-1} =$$
$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n)! \cdot n}{n! \cdot n!} = n\binom{2n}{n}.$$

Počet všech cest je tedy $2n\binom{2n}{n}$.

Poznámky. Při druhém postupu je třeba zvláště prověřit případ $n = 1$, protože tehdy ne všechna kombinační čísla a úpravy výše dávají smysl.

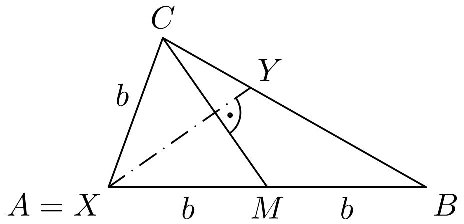
Závěrečný vzorec lze dostat (v závislosti na použitých úpravách) v různých tvarech, zde jsme uvedli jen dva z nich.

---

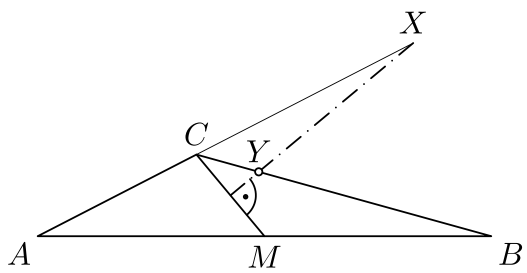
3. *V libovolném trojúhelníku ABC, ve kterém těžnice z vrcholu C není kolmá na stranu CA ani na stranu CB, označme X a Y průsečíky osy této těžnice s přímkami CA a CB. Najděte všechny takové trojúhelníky ABC, pro něž body A, B, X, Y leží na téže kružnici.* (Ján Mazák)

Řešení. Pro velikosti stran a úhlů trojúhelníku ABC budeme používat standardní označení. Dále označme M střed strany AB. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|AC| \leqq |BC|$. V takovém případě je úhel CMB neostrý, takže bod Y bude vnitřním bodem strany BC. Uvažujme postupně všechny možné polohy bodu X vzhledem k bodům A, C na přímce AC.

Zřejmě $X \neq C$. Pokud $X = A$, jsou body A, B, X, Y pouze trojicí různých bodů a určitě leží na jedné kružnici (očividně totiž neleží v přímce). Trojúhelník ABC proto v takovém případě vyhovuje zadání. Osa těžnice CM prochází bodem A, právě když $|AC| = |AM|$. Mezi hledané trojúhelníky tedy patří všechny trojúhelníky, v nichž $c = 2b$ (obr. 2).[2]



Obr. 2

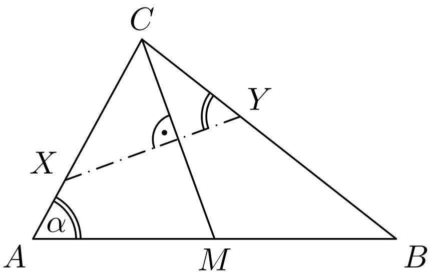


Obr. 3

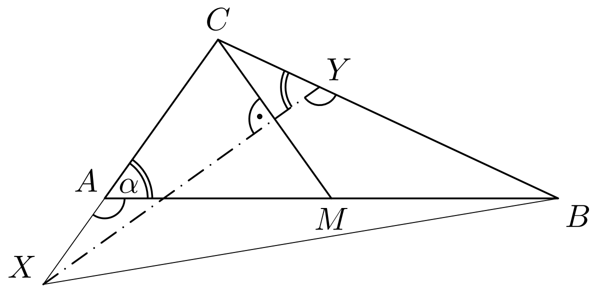
Pokud bod X leží na polopřímce opačné k polopřímce CA (to nastane, právě když je úhel ACB tupý, obr. 3), leží bod Y uvnitř trojúhelníku ABX, takže určitě neleží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku. Žádný trojúhelník ABC s takovou polohou bodu X tudíž zadání nevyhovuje.

Pokud bod X leží uvnitř strany AC (obr. 4a), leží dané body na jedné kružnici, právě když je čtyřúhelník $ABYX$ tětivový, tj. právě když $|\sphericalangle XYC| = \alpha$. Stejnou podmínku dostaneme i v případě, že bod X je vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce AC (obr. 4b), protože v takovém případě je tětivovost čtyřúhelníku $AXBY$ ekvivalentní shodnosti obvodových úhlů XYB a XAB, jejichž velikosti jsou $180° - |\sphericalangle XYC|$ a $180° - \alpha$.

[2] Díky trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c$ pro každý trojúhelník splňující $c = 2b$ platí $a > b$, takže všechny takové trojúhelníky splňují předpokládanou nerovnost $|AC| \leqq |BC|$.



Obr. 4a

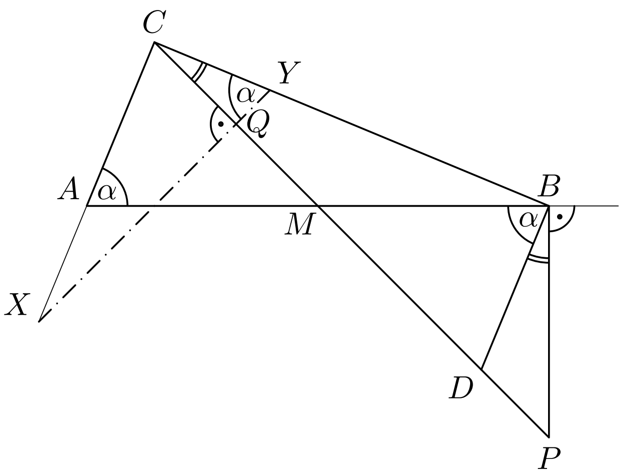


Obr. 4b

Hledáme tedy takové trojúhelníky ABC, pro něž bod $X \neq A$ leží na polopřímce CA a úhel XYC má velikost α.

Pokud je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, je $\beta = \alpha$ a přímka XY je rovnoběžná s AB, takže $|\sphericalangle XYC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ a trojúhelník zřejmě vyhovuje zadání.

Předpokládejme tedy, že je $|AC| < |BC|$. V takovém případě polopřímka CM protne kolmici vedenou bodem B ke straně AB v bodě, který označíme P. Označme ještě Q střed úsečky CM a D obraz bodu C ve středové souměrnosti podle M (obr. 5). Z pravoúhlého trojúhelníku CQY vidíme, že $\alpha < 90°$ a $|\sphericalangle BCP| = 90° - \alpha$. Ze středové



Obr. 5

souměrnosti se středem M plyne $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$, takže bod D leží uvnitř úsečky MP a $|\sphericalangle DBP| = 90° - \alpha$. Trojúhelníky DBP a BCP jsou tedy podobné podle věty *uu*, takže dostáváme

$$|DP| : |BP| = |BP| : |CP|, \quad \text{tj.} \quad |DP| \cdot |CP| = |BP|^2. \tag{1}$$

Přitom $|DP| \cdot |CP| = (|PM| - |DM|)(|PM| + |MC|) = |PM|^2 - |MC|^2$, zatímco podle Pythagorovy věty je $|BP|^2 = |PM|^2 - |MB|^2$. Dosazením do (1) tak po úpravě dostaneme $|MB| = |MC|$. To znamená, že kružnice s průměrem AB prochází bodem C, takže trojúhelník ABC má při vrcholu C pravý úhel.

Naopak, pokud trojúhelník ABC má pravý úhel při vrcholu C, leží bod C na Thaletově kružnici se středem M a poloměrem $|MB|$, takže trojúhelník BCM je rovnoramenný se základnou BC a $|\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle CBM| = 90° - \alpha$, odkud $|\sphericalangle XYC| = \alpha$. Jelikož úhel ACM je ostrý, leží bod X na polopřímce CA, a z uvedeného tak vyplývá, že trojúhelník ABC vyhovuje zadání.

Závěr. Shrnutím uvedených výsledků a přidáním řešení příslušejících k případu $|AC| > |BC|$ dostáváme, že zadání vyhovují:

- ▷ všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou AB;

▷ všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponou AB;
▷ všechny trojúhelníky, jejichž strana AB je dvakrát delší než jedna ze zbývajících dvou stran.

(Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník se základnou AB je zahrnut v prvním i druhém bodu; pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB a s úhlem $\alpha = 60°$ nebo $\beta = 60°$ je zahrnut v druhém i třetím bodě.)

Pomocí délek stran lze tyto trojúhelníky charakterizovat symbolicky podmínkou

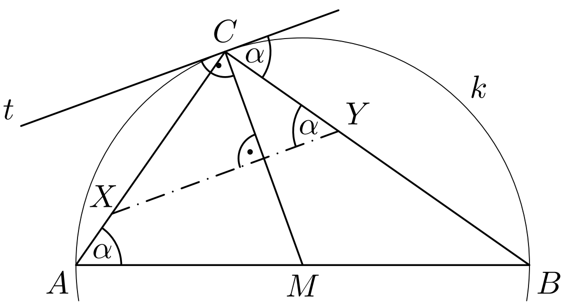
$$a = b \ \vee \ a^2 + b^2 = c^2 \ \vee \ c = 2a \ \vee \ c = 2b,$$

případně pomocí velikostí vnitřních úhlů podmínkou

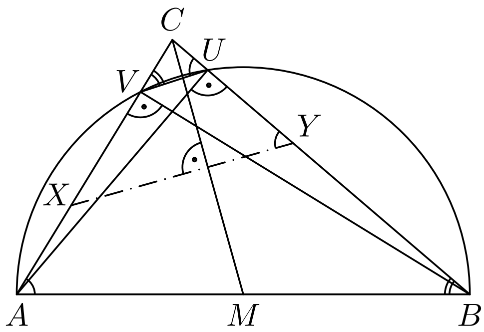
$$\alpha = \beta \ \vee \ \gamma = 90° \ \vee \ \sin\gamma = 2\sin\alpha \ \vee \ \sin\gamma = 2\sin\beta.$$

Poznámka. Klíčový poznatek, že při poloze bodu X na polopřímce CA z rovnosti $|\sphericalangle XYC| = \alpha$ vyplývá $\alpha = \beta$ nebo $\gamma = 90°$, lze odvodit mnoha jinými způsoby. Nastíníme několik takových řešení, přičemž již nebudeme uvádět zbylou část postupu, jen dokážeme uvedenou implikaci a občas vynecháme některé detaily.

Jiné řešení. Sestrojme v bodě C kolmici t k těžnici CM. Přímka t je rovnoběžná s její osou XY, takže svírá se stranou BC úhel velikosti α (obr. 6). Z vlastností obvodových a úsekových úhlů vyplývá, že t je tečnou kružnice k opsané trojúhelníku ABC. Těžnice CM tudíž prochází středem kružnice k. Protože M je střed AB, mohou nastat dva případy: buď je přímka CM osou strany AB, takže $\alpha = \beta$, nebo je bod M středem kružnice k, takže $\gamma = 90°$.



Obr. 6



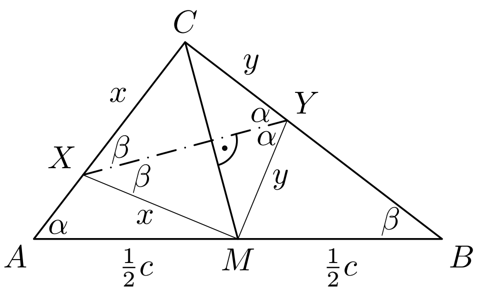
Obr. 7

Jiné řešení. Předpokládejme, že $\gamma \neq 90°$, a sestrojme paty výšek z vrcholů A, B, které postupně označíme U, V. Tyto paty leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB a z tětivového čtyřúhelníku $ABUV$ (pokud $\gamma < 90°$), resp. $ABVU$ (pokud $\gamma > 90°$) dostaneme $|\sphericalangle VUC| = \alpha$ a $|\sphericalangle UVC| = \beta$ (obr. 7). Přímka UV je tudíž rovnoběžná s XY, tj. je kolmá k těžnici CM. Avšak $|MV| = |MU|$ (neboť M je střed Thaletovy kružnice nad průměrem AB), takže trojúhelník UVM je rovnoramenný se základnou UV a přímka CM je zároveň osou základny UV. Proto $|CU| = |CV|$ neboli $\alpha = \beta$.

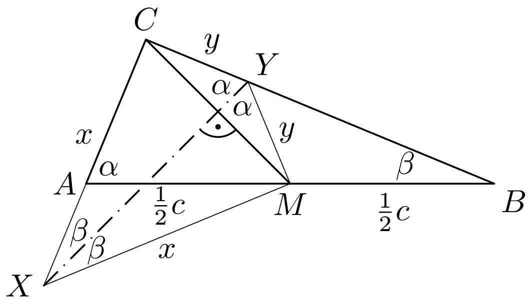
Jiné řešení. Označme $|CX| = |MX| = x$ a $|CY| = |MY| = y$. Pokud X leží uvnitř strany AC (obr. 8a), je $|\sphericalangle AXM| = 180° - 2\beta$ a ze sinové věty v trojúhelníku AMX máme

$$\frac{\frac{1}{2}c}{\sin(180° - 2\beta)} = \frac{x}{\sin\alpha}, \quad \text{takže} \quad x = \frac{c\sin\alpha}{2\sin 2\beta}.$$

Totéž vyjádření získáme i v případě, že bod X leží na polopřímce opačné k AC (obr. 8b — tehdy má trojúhelník AMX při vrcholech A a X úhly s velikostmi $180° - \alpha$ a 2β). Analogicky odvodíme $y = c\sin\beta/2\sin 2\alpha$.



Obr. 8a



Obr. 8b

Z mocnosti bodu C ke kružnici, na níž leží body A, B, X, Y, máme $xb = ya$. Dosazením odvozených vztahů dostáváme

$$\frac{bc\sin\alpha}{2\sin 2\beta} = \frac{ac\sin\beta}{2\sin 2\alpha}, \quad \text{takže} \quad \sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

kde jsme využili rovnost $a\sin\beta = b\sin\alpha$, která vyplývá ze sinové věty. Je tedy $2\alpha = 2\beta$ nebo $2\alpha + 2\beta = 180°$. V prvním případě je $\alpha = \beta$, v druhém $\gamma = 90°$.

---

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a(b^2 + c) &= c(c + ab),\\ b(c^2 + a) &= a(a + bc),\\ c(a^2 + b) &= b(b + ca). \end{aligned}$$

(Michal Rolínek)

Řešení. Každou rovnici upravíme tak, aby členy třetího stupně byly nalevo a členy druhého stupně napravo. Po vyjmutí společných činitelů před závorku dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned} ab(b - c) &= c(c - a),\\ bc(c - a) &= a(a - b),\\ ca(a - b) &= b(b - c). \end{aligned} \tag{1}$$

Nejprve vyšetříme možnost, že dvě neznámé mají stejnou hodnotu. Je-li např. $a = b$, pak z třetí rovnice plyne buď $b = c$, nebo $a = b = 0$ a poté z první rovnice i $c = 0$. V obou případech je $a = b = c$. Totéž dostaneme i pro jinou dvojici neznámých. Dosazením snadno ověříme, že trojice (t, t, t) je řešením dané soustavy pro každé reálné t.

Pokud je některá z neznámých nulová, např. $a = 0$, plyne z první rovnice $c = 0$ a následně z třetí rovnice i $b = 0$. Podobně jsou všechny tři neznámé nulové i tehdy, pokud $b = 0$ nebo pokud $c = 0$. Trojice $(0, 0, 0)$ je přitom zahrnuta již mezi řešeními v předchozím odstavci.

Předpokládejme nakonec, že trojice (a, b, c) je řešením, přičemž žádná dvě z čísel a, b, c nejsou stejná a žádné není nulové, tj. všichni činitelé ve všech rovnicích v (1) jsou nenuloví. Po vzájemném vynásobení těchto rovnic a vydělení společných činitelů dostaneme $abc = 1$, z čehož po vynásobení jednotlivých rovnic v (1) postupně členy c, a, b vycházejí rovnice

$$\begin{aligned} b - c &= c^2(c - a),\\ c - a &= a^2(a - b),\\ a - b &= b^2(b - c). \end{aligned}$$

Činitelé a^2, b^2, c^2 jsou kladní, proto všechny tři výrazy $a - b$, $b - c$, $c - a$ mají stejné znaménko. To však není možné, protože jejich součet je nulový. Žádné další řešení tedy neexistuje a jedinými řešeními dané soustavy jsou trojice (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$.

Jiné řešení. Předpokládejme, že trojice (a, b, c) je řešením soustavy. Pokud $a = 0$, plyne z první rovnice $c = 0$ a ze třetí rovnice pak i $b = 0$. Podobně dostáváme, že pokud je kterákoli z neznámých nulová, jsou nulové všechny. Trojice $(0, 0, 0)$ je opravdu řešením. Dále proto budeme předpokládat, že všechny tři neznámé jsou nenulové.

Vynásobme první rovnici soustavy neznámou b a přičtěme k ní druhou rovnici:

$$ab(b^2 + c) + b(c^2 + a) = bc(c + ab) + a(a + bc).$$

Další úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} ab^3 + ab &= ab^2c + a^2, \\ b^3 + b &= b^2c + a. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhledem k tomu, že cyklickou záměnou neznámých se rovnice původní soustavy nezmění, musejí být splněny i rovnice, které dostaneme cyklickou záměnou neznámých v rovnici (2), tedy

$$c^3 + c = c^2a + b, \tag{3}$$

$$a^3 + a = a^2b + c. \tag{4}$$

Z rovností (2), (3), (4) vyplývá, že všechny tři neznámé a, b, c mají stejné znaménko. Opravdu, pokud jsou např. obě neznámé a, b kladné, je kladná i pravá strana (3), tudíž i její levá strana, a to je možné jen pro $c > 0$. Stejná úvaha zřejmě funguje i pro záporná a, b a i pro kterékoli jiné dvě neznámé. Navíc snadno nahlédneme, že pokud trojice (a, b, c) splňuje rovnosti (2), (3), (4), splňuje je i trojice $(-a, -b, -c)$. Stačí tedy uvažovat jen případ, kdy všechny tři neznámé jsou kladné.

Sečtením rovností (2), (3), (4) dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2b + b^2c + c^2a. \tag{5}$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice kladných čísel platí

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geqq a^2b, \qquad \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} \geqq b^2c, \qquad \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} \geqq c^2a.$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme $a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2b + b^2c + c^2a$, přičemž rovnost tu, a tedy i v (5) platí pouze tehdy, pokud platí ve všech třech nerovnostech výše, tj. když $a = b = c$. Tím jsme dokázali, že řešením soustavy může být jen trojice shodných čísel. Snadno ověříme, že každá taková trojice opravdu vyhovuje.

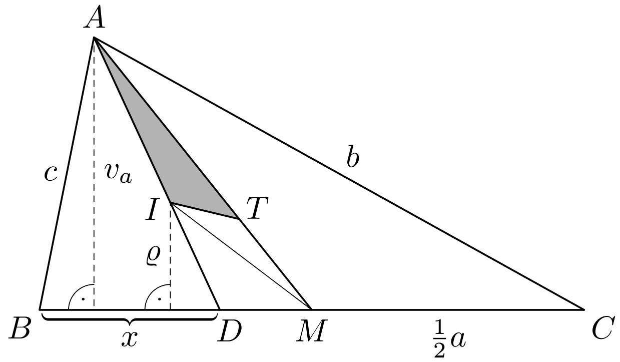
---

5. *Je dán trojúhelník ABC, jehož každé dvě strany se liší aspoň o délku $d > 0$. Označme T jeho těžiště, I střed kružnice vepsané a ϱ její poloměr. Dokažte, že*

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} \geqq \frac{2}{3} d\varrho,$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. (Michal Rolínek)

Řešení. Strany trojúhelníku označme obvyklým způsobem a, b, c; budeme také používat označení v_a pro velikost výšky trojúhelníku na stranu a. Nechť M je střed strany BC a D její průsečík s osou AI úhlu BAC. Trojúhelníky AIT a AIM mají společnou výšku z vrcholu I, a protože těžiště T leží ve dvou třetinách těžnice AM, je $S_{AIT} = \frac{2}{3}S_{AIM}$ (obr. 9). Obsah trojúhelníku AIM vyjádříme jako rozdíl obsahů trojúhelníků DMA



Obr. 9

a DMI, které mají společnou stranu DM a jejich výšky na tuto stranu mají velikosti v_a, resp. ϱ. Máme tedy

$$S_{AIM} = S_{DMA} - S_{DMI} = \frac{|DM| \cdot v_a}{2} - \frac{|DM| \cdot \varrho}{2} = \frac{1}{2}|DM|(v_a - \varrho).$$

Podle známých vzorců je

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}(a+b+c)\varrho, \qquad \text{odkud} \qquad v_a = \frac{a+b+c}{a}\varrho = \varrho + \frac{b+c}{a}\varrho.$$

Spojením dosud odvozených vztahů dostáváme

$$S_{AIT} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|DM|(v_a - \varrho) = \frac{1}{3}|DM|\frac{b+c}{a}\varrho. \tag{1}$$

Délku $|DM|$ vyjádříme jako kladný rozdíl délky $|BM| = \frac{1}{2}a$ a délky $|BD|$, kterou označíme x. Víme, že osa úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru přilehlých stran. Proto $x : (a - x) = c : b$, odkud vyjádříme x:

$$x = \frac{ac}{b+c}.$$

Je tedy

$$|DM| = \left|\frac{1}{2}a - x\right| = \left|\frac{1}{2}a - \frac{ac}{b+c}\right| = \left|\frac{a(b+c) - 2ac}{2(b+c)}\right| = \left|\frac{a(b-c)}{2(b+c)}\right| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}.$$

Dosazením do (1) nakonec vyjde

$$S_{AIT} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a|b-c|}{2(b+c)} \cdot \frac{b+c}{a}\varrho = \frac{1}{6}|b-c|\varrho.$$

Analogicky odvodíme

$$S_{BIT} = \frac{1}{6}|c-a|\varrho, \qquad S_{CIT} = \frac{1}{6}|a-b|\varrho.$$

Podle zadání je každá z hodnot $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ alespoň d. Přitom zřejmě největší z těchto tří hodnot je rovna součtu zbývajících dvou, tj. má velikost alespoň $2d$, takže součet všech tří je alespoň $d + d + 2d = 4d$. Platí proto

$$S_{AIT} + S_{BIT} + S_{CIT} = \frac{1}{6}(|b-c| + |c-a| + |a-b|)\varrho \geqq \frac{1}{6} \cdot 4d \cdot \varrho = \frac{2}{3}d\varrho,$$

což bylo třeba dokázat.

6. *Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Určete největší celé číslo d, pro něž platí následující tvrzení: Z libovolné n-prvkové množiny celých čísel lze vybrat tři různé neprázdné podmnožiny tak, že součet prvků každé z nich je celočíselným násobkem čísla d. (Vybrané podmnožiny mohou mít společné prvky.)* (Jaromír Šimša)

Řešení. Uvedené tvrzení neplatí pro žádné $d \geqq n$: stačí uvážit n-prvkovou množinu sestavenou z celých čísel, která při dělení číslem d dávají zbytek 1. V případě $d = n$ je jedinou „vyhovující" podmnožinou celá n-prvková množina, v případě $d > n$ žádná taková neexistuje.

V druhé části řešení ukážeme, že tvrzení platí pro $d = n - 1$. V dalším výkladu všechny uvažované množiny budou neprázdné, jejich prvky budou celá čísla a $s(\mathsf{X})$ bude značit součet všech prvků množiny X.

Nejprve dokážeme (známé) tvrzení, že má-li X alespoň d prvků, pak existuje $\mathsf{Y} \subset \mathsf{X}$ s vlastností $d \mid s(\mathsf{Y})$. Skutečně, pokud vybereme d různých prvků $x_1, \ldots, x_d \in \mathsf{X}$, pak v případě, kdy žádný z d součtů

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_d$$

není násobkem d, dva z nich dávají při dělení číslem d stejný zbytek; jejich rozdíl je pak násobkem čísla d, který je součtem $s(Y)$ pro vyhovující podmnožinu Y.

Vraťme se k důkazu tvrzení ze zadání úlohy pro $d = n-1$. Nechť tedy X je libovolná množina mající n prvků. Podle dokázaného poznatku najdeme množinu $\mathsf{X}_1 \subset \mathsf{X}$ takovou, že $n - 1 \mid s(\mathsf{X}_1)$. Zvolme nějaké $x_1 \in \mathsf{X}_1$ a pro $(n-1)$-prvkovou množinu $\mathsf{X}' = \mathsf{X} \setminus \{x_1\}$ znovu použijeme poznatek: existuje množina $\mathsf{X}_2 \subset \mathsf{X}'$ taková, že $n - 1 \mid s(\mathsf{X}_2)$. Jelikož $x_1 \in \mathsf{X}_1$ a $x_1 \notin \mathsf{X}_2$, máme už vybrány dvě různé podmnožiny množiny X požadované vlastnosti. Třetí podmnožinu $\mathsf{X}_3 \subset \mathsf{X}$ splňující $n - 1 \mid s(\mathsf{X}_3)$ nyní najdeme takto: v případě $\mathsf{X}_1 \cap \mathsf{X}_2 = \emptyset$ zvolíme $\mathsf{X}_3 = \mathsf{X}_1 \cup \mathsf{X}_2$; v opačném případě, kdy $\mathsf{X}_1 \cap \mathsf{X}_2 \neq \emptyset$, zvolíme $x_2 \in \mathsf{X}_1 \cap \mathsf{X}_2$ a ještě potřetí uplatníme stejný poznatek — tentokrát na $(n-1)$-prvkovou množinu $\mathsf{X}'' = \mathsf{X} \setminus \{x_2\}$ — a najdeme tak hledané $\mathsf{X}_3 \subset \mathsf{X}''$.

Odpověď. Hledané největší d je rovno $n - 1$.

Poznámka. Pro hodnotu $d = n-1$ se může stát, že požadovanou vlastnost budou mít právě tři (různé) podmnožiny n-prvkové množiny X. Nastane to, když čísla z n-prvkové množiny X budou při dělení číslem $n - 1$ dávat zbytky $1, 1, 1, \ldots, 1, 0$. Jedna vyhovující množina bude mít jeden prvek, druhá $n - 1$ prvků a třetí (všech) n prvků.