64. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Součin všech kladných dělitelů přirozeného čísla n je 20^{15}. Určete n.

2. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

kde x je libovolné reálné číslo. Pro která x výraz V této hodnoty nabývá?

3. Dokažte, že průsečík výšek a těžiště daného ostroúhlého trojúhelníku ABC mají stejnou vzdálenost od strany AB, právě když pro vnitřní úhly α, β při vrcholech A, B platí rovnost $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$.

4. Na tabuli je seznam čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a „rovnice“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášem hrají následující hru. Nejprve Marek vybere libovolné číslo ze seznamu, napíše je do jednoho z prázdných políček v „rovnici“ a číslo ze seznamu smaže. Poté Tomáš vybere některé ze zbývajících čísel, napíše je do jiného prázdného políčka a v seznamu je smaže. Nato Marek provede totéž a nakonec Tomáš doplní tři zbylá čísla na tři zbývající volná políčka v „rovnici“. Marek vyhraje, jestliže vzniklá kvadratická rovnice s racionálními koeficienty bude mít dva různé reálné kořeny, jinak vyhraje Tomáš. Rozhodněte, který z hráčů může vyhrát nezávisle na postupu druhého hráče.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 31. března 2015

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

64. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Číslo $20^{15} = 2^{30}5^{15}$ je dělitelné pouze prvočísly 2 a 5, hledané číslo n musí tedy být tvaru $n = 2^a5^b$, kde a, b jsou přirozená čísla. Každý jeho kladný dělitel je tak tvaru $2^\alpha 5^\beta$, kde $\alpha \in \{0, 1, \ldots, a\}$ a $\beta \in \{0, 1, \ldots, b\}$, navíc z věty o jednoznačném rozkladu přirozeného čísla na součin prvočísel plyne, že pro různá α, β dostáváme různé dělitele.

Pro každé $\beta \in \{0, 1, \ldots, b\}$ uvažujme nyní všechny dělitele čísla n, kteří jsou dělitelní číslem 5 právě v mocnině β. Jsou to

$$\underbrace{2^05^\beta,\ 2^15^\beta,\ 2^25^\beta, \ldots,\ 2^a5^\beta}_{a+1 \text{ čísel}}$$

a jejich součin je

$$2^{0+1+2+\ldots+a}5^{(a+1)\beta} = 2^{a(a+1)/2}5^{(a+1)\beta}.$$

Vynásobíme-li všechny tyto součiny pro $\beta = 0, 1, \ldots, b$, dostaneme součin všech kladných dělitelů čísla n, který je tak roven

$$2^{a(a+1)(b+1)/2}5^{(a+1)b(b+1)/2}.$$

Odtud plyne, že pro nalezení čísla n stačí vyřešit v oboru přirozených čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}a(a+1)(b+1) &= 30,\\ \tfrac{1}{2}(a+1)b(b+1) &= 15. \end{aligned} \tag{1}$$

Výrazy na obou stranách těchto rovnic jsou zřejmě nenulové, jejich vydělením dostaneme po úpravě $a = 2b$, dosazením do první rovnice soustavy pak

$$b(b+1)(2b+1) = 30.$$

Protože $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, vidíme, že jedno řešení je $b = 2$. Protože funkce $x(x+1)(2x+1)$ je na množině kladných čísel jako součin tří kladných rostoucích funkcí sama rostoucí, je toto řešení jediné. Soustava (1) má proto jediné řešení $a = 4$, $b = 2$, kterému odpovídá hledané přirozené číslo $n = 2^45^2 = 400$.

Existuje jediné přirozené číslo n, které vyhovuje podmínkám úlohy, a to $n = 400$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za poznatek, že každý dělitel čísla n je tvaru $2^\alpha 5^\beta$ udělte 1 bod, za nalezení jejich součinu udělte další 2 body, za sestavení soustavy (1) (či soustavy s ní ekvivalentní) další 1 bod, za její správné vyřešení a nalezení čísla n zbývající 2 body. Pokud z metody řešení (1) nebude vyplývat, že nalezené řešení je jediné a student to nezdůvodní, strhněte 1 bod. Pokud řešitel pouze dokáže, že číslo $n = 400$ má požadovanou vlastnost bez náznaku jeho odvození, udělte 2 body (k těmto bodům nelze přičíst body podle předcházejícího schématu).

2. Užijeme známou nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2, \tag{1}$$

která platí pro libovolné kladné reálné číslo a, protože vznikne algebraickou úpravou zřejmé nerovnosti $\left(\sqrt{a} - 1/\sqrt{a}\right)^2 \geqq 0$. Odtud také plyne, že rovnost v ní nastane, právě když $a = 1$.

Jednoduchou úpravou výrazu V dostaneme podle (1) pro kladné $a = \frac{1}{2}(2x^2+1)$

$$V = \left(\frac{2x^2+1}{2} + \frac{2}{2x^2+1}\right) - \frac{1}{2} \geqq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $\frac{1}{2}(2x^2+1) = 1$, tj. právě když $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Nejmenší hodnota výrazu V je $\frac{3}{2}$, výraz této hodnoty nabývá pro $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

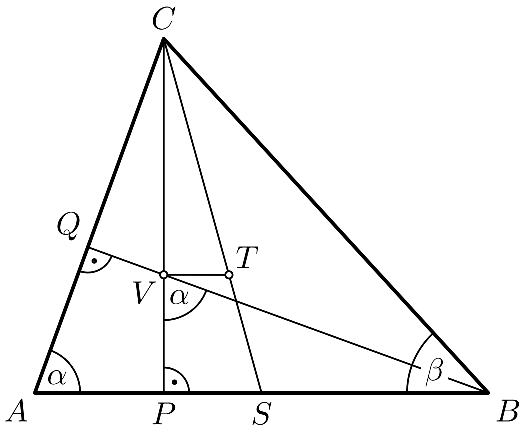
Jiné řešení. Úprava

$$\begin{aligned} V &= x^2 + \frac{2}{2x^2+1} = \frac{2x^4+x^2+2}{2x^2+1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2x^2-1)^2 + 3x^2 + \frac{3}{2}}{2x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x^2-1)^2}{2x^2+1} + \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

jež je korektní pro každé reálné číslo x, ukazuje, že $V \geqq \frac{3}{2}$, přitom rovnost nastane, právě když $2x^2 - 1 = 0$ neboli $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Nerovnosti typu (1) (odpovídající AG nerovnosti pro dvě nezáporná čísla) lze považovat za obecně známé a není třeba je dokazovat. Pokud nebudou (správně) určeny obě hodnoty x, pro které V nabývá svého minima, strhněte 2 body.

3. V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek, T těžiště, S střed strany AB a P a Q po řadě paty výšek z vrcholů C a B (obr. 1).



Obr. 1

V ostroúhlém trojúhelníku ABC leží body V a T uvnitř poloroviny ABC a bod P je vnitřním bodem úsečky AB. Pro $\alpha \neq \beta$ jsou body V a T různé, a mají tak stejnou vzdálenost od strany AB, právě když je přímka VT rovnoběžná s přímkou AB. Vzhledem k tomu, že bod T dělí těžnici CS v poměru $2:1$, odvozená podmínka rovnoběžnosti bude splněna, právě když budou trojúhelníky CVT a CPS podobné, tj. právě když bude ve stejném poměru dělit i bod V výšku CP. Tuto podmínku vyjádříme rovností

$$\frac{|CP|}{|VP|} = 3. \tag{1}$$

V případě $\alpha = \beta$ je $P = S$ a těžiště T leží na výšce CP, proto body V a T mají od základny AB stejnou vzdálenost, právě když $V = T$, což právě vyjadřuje rovnost (1).

Zbývá tedy ukázat, že poměr délek úseček v (1) se dá vyjádřit jako součin tangent úhlů α a β. V libovolném ostroúhlém trojúhelníku ABC platí, že pravoúhlé trojúhelníky ABQ a VBP se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B (obr. 1), jsou tedy podobné a platí $|\sphericalangle BVP| = \alpha$. Z pravoúhlých trojúhelníků VBP a CBP plyne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BP|}{|VP|} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{|CP|}{|BP|},$$

proto obecně platí

$$\frac{|CP|}{|VP|} = \frac{|BP|}{|VP|} \cdot \frac{|CP|}{|BP|} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta. \tag{2}$$

Nutnou a postačující podmínku (1) tak lze zapsat pomocí (2) jako $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. V případě $\alpha = \beta$ lze ovšem postup z podaného řešení zjednodušit. Bod T totiž leží tehdy na výšce CP, takže má od strany AB stejnou vzdálenost jako bod V, právě když platí $V = T$, což je ekvivalentní s tím, že daný trojúhelník ABC je rovnostranný neboli že oba (shodné) úhly α a β mají velikost $60°$. A to je právě ten ostrý úhel, jehož tangens má velikost $\sqrt{3}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za odvození podmínky (1) udělte 3 body, za objev podobných trojúhelníků ABQ a VBP 1 bod a za dopočet udělte zbývající 2 body. Chybí-li vysvětlení, že tvrzení platí i v případě $\alpha = \beta$, strhněte 1 bod. Jde-li naopak o jediný objasněný případ, udělte 1 bod.

4. Označme a, b, c koeficienty výsledné rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Ta má dva různé reálné kořeny, právě když je její diskriminant (v symbolické podobě)

$$b^2 - 4ac = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square}$$

kladný.

Ukážeme, že vyhrávající strategii má Marek. Nejprve do jmenovatele zlomku pro koeficient b napíše 1.

a) Pokud Tomáš obsadí ve svém prvním tahu jiné místo než v čitateli b, napíše do něj Marek v následujícím tahu největší zbývající číslo v seznamu (tedy 5 nebo 6). Hodnota b^2 pak bude alespoň 25 a ze zbývajících čísel lze sestavit výraz $4ac$ s hodnotou nejvýše $4\,\frac{6\cdot 4}{3\cdot 2} = 16$. Diskriminant vzniklé kvadratické rovnice tak bude jistě kladný.

b) Předpokládejme, že Tomáš ve svém tahu doplní čitatele b. Marek poté ve druhém tahu napíše nejmenší zbývající číslo v seznamu (2 nebo 3) do čitatele a (nebo c).

   (i) V případě, že Tomáš v prvním tahu napsal do čitatele b číslo 2, je hodnota b^2 rovna 4 a největší možná hodnota $4ac$ (s přihlédnutím ke druhému Markovu tahu) je $4\,\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5} = \frac{18}{5} < 4$, proto diskriminant vzniklé kvadratické rovnice bude opět kladný.

   (ii) V případě, že Tomáš v prvním tahu napsal do čitatele b jiné číslo než 2, je hodnota b^2 alespoň 9 a hodnota $4ac$ je nejvýše $4\,\frac{2\cdot 6}{3\cdot 4} = 4$, takže diskriminant vzniklé kvadratické rovnice bude i v tomto případě kladný.

Závěr. V dané hře může vyhrát Marek nezávisle na tazích Tomáše. Jeho vítězná strategie je popsána výše.

Jiné řešení (podle *Barbory Výborové* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně).

Popišme jinou Markovu vítěznou strategii pro druhý tah. K tomu označme p, q, r doplňované čitatele a s, t, u jmenovatele zlomků v rovnici takto:

$$\frac{p}{s}x^2 + \frac{q}{t}x + \frac{r}{u} = 0.$$

Jak víme, Marek vyhraje, právě když bude platit

$$\left(\frac{q}{t}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p}{s} \cdot \frac{r}{u} > 0 \quad \text{neboli} \quad q^2su > 4prt^2.$$

Zatímco Marek prvním tahem zvolí jmenovatel $t = 1$ (jako v původním řešení), ve svém druhém tahu nyní vybere čitatel p nebo r (aspoň jeden z nich Tomáš svým prvním tahem nezadá) a zvolí za něj nejmenší dostupné číslo. Vzhledem k symetrické roli čitatelů p a r v uvedené nerovnosti budeme dále předpokládat, že Marek svým druhým tahem zvolí hodnotu $p \in \{2, 3\}$.

Ať Tomáš hraje jakkoli, vždy bude platit $t = 1$, $p \leqq 3$, $r \leqq 6$, $q \geqq 2$, $qsu \geqq 2 \cdot 4 \cdot 5$, a tedy $q^2su \geqq 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 80 > 72 = 4 \cdot 3 \cdot 6 \geqq 4prt^2$, takže Marek vyhraje.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za konstatování, že vyhrávající strategii má Marek tím, že napíše 1 do jmenovatele b, udělte 2 body. Zbývajícími 4 body ohodnoťte úplnost zbývajících úvah.