

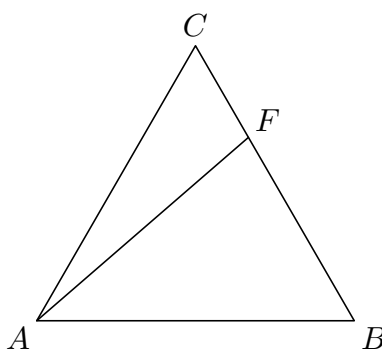
II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

V rovnostranném trojúhelníku ABC leží na straně BC bod F . Obsah trojúhelníku ABF je třikrát větší než obsah trojúhelníku ACF a rozdíl obvodů těchto dvou trojúhelníků je 5 cm.

Určete délku strany trojúhelníku ABC . (E. Semerádová)

Možné řešení. Trojúhelníky ABF a ACF mají společnou výšku ze společného vrcholu A , proto jsou obsahy těchto trojúhelníků ve stejném poměru jako délky stran, které jsou vrcholu A protilehlé. Platí tedy, že $|BF| = 3|CF|$.



Strana AF je oběma trojúhelníkům společná a strany AB a AC jsou shodné, protože trojúhelník ABC je rovnostranný. Z daného vztahu pro obvody těchto trojúhelníků vyplývá, že

$$|BF| = |CF| + 5 \text{ cm.}$$

Z předchozího odstavce víme, jaký je vztah mezi velikostmi stran BF a CF , takže můžeme určit velikost jedné z těchto úseček:

$$\begin{aligned} 3|CF| &= |CF| + 5 \text{ cm,} \\ |CF| &= 2,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Délka strany trojúhelníku ABC je tedy rovna

$$|BC| = |BF| + |CF| = 4|CF| = 10 \text{ cm.}$$

Návrh hodnocení. 2 body za určení poměru délek úseček BF a CF ; 1 bod za zjištění, že délky stran AF , AB , resp. AC do rozdílu obvodů nepřispívají; 3 body za dořešení úlohy.

Z8–II–2

Tři hudebníci Janek, Mikeš a Vávra si obvykle rozdělí společný honorář v poměru 4 : 5 : 6, nejméně dostane Janek a nejvíce Vávra. Tentokrát Vávra nehrál dobře, a tak se svého dílu vzdal. Janek navrhl, že si Vávrovu část rozdělí s Mikšem na poloviny. Mikeš však trval na tom, aby si i tuto část rozdělili nerovnoměrně jako obvykle, tedy v poměru 4 : 5. Mikeš by totiž podle Jankova návrhu dostal o 40 Kč méně než podle svého.

Určete výši společného honoráře. (L. Šimůnek)

Možné řešení. Zadaný postupný poměr 4 : 5 : 6 rozšíříme tak, abychom mohli jeho třetí člen vhodně rozdělit jak podle Jankova návrhu (dělení v poměru 1 : 1), tak podle Mikšova návrhu (dělení v poměru 4 : 5). Poměr proto rozšíříme tak, aby jeho třetí člen byl dělitelný dvěma a zároveň devíti, rozšíříme jej tedy třemi:

$$12 : 15 : 18.$$

Obnos původně určený pro Vávru se skládá z 18 stejných dílů, z nichž Janek navrhuje přidělit 9 sobě a 9 Mikšovi, zatímco Mikeš navrhuje dát 8 dílů Jankovi a 10 sobě. Podle Jankova návrhu by tak Mikeš dostal o 1 díl méně než podle svého vlastního návrhu. Tento díl odpovídá 40 Kč. Společný honorář pro hudebníky byl tvořen 45 takovými díly ($12 + 15 + 18 = 45$), celkem tedy dostali

$$45 \cdot 40 = 1\,800 \text{ (Kč)}.$$

Návrh hodnocení. 2 body za výsledek; 4 body za postup řešení.

Z8–II–3

Pokud jeden rozměr kvádru zdvojnásobíme, druhý rozměr kvádru vydělíme dvěma a třetí rozměr zvětšíme o 6 cm, dostaneme krychli, která má stejný povrch jako původní kvádr.

Určete rozměry tohoto kvádru. (M. Petrová)

Možné řešení. Vyjdeme od konce, tzn. z rozměrů výsledné krychle zpětně odvodíme rozměry původního kvádru. Označíme-li délku hrany krychle v centimetrech x , potom jeden rozměr kvádru je $\frac{x}{2}$ (dvojnásobek této délky je délka hrany krychle), druhý rozměr kvádru je $2x$ (polovina této délky je délka hrany krychle) a třetí rozměr je $x - 6$ (tato délka zvětšená o 6 cm je délka hrany krychle).

Povrch výsledné krychle je $6x^2$, zatímco povrch původního kvádru je roven

$$2 \left(\frac{x}{2} \cdot 2x + \frac{x}{2} \cdot (x - 6) + 2x \cdot (x - 6) \right) = 2x^2 + x^2 - 6x + 4x^2 - 24x = 7x^2 - 30x.$$

Protože oba povrchy jsou si rovny, dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 7x^2 - 30x, \\ 0 &= x^2 - 30x = x \cdot (x - 30). \end{aligned}$$

Protože x nemůže být nula (x je délka hrany krychle), musí být $x = 30$ (cm).

Rozměry původního kvádru tedy jsou:

$$\frac{30}{2} = 15 \text{ (cm)}, \quad 2 \cdot 30 = 60 \text{ (cm)}, \quad 30 - 6 = 24 \text{ (cm)}.$$

Návrh hodnocení. 1 bod za vyjádření rozměrů kvádru pomocí délky hrany krychle; po 1 bodu za vyjádření povrchu každého z těles; 2 body za vyřešení rovnice (a to i v případě, že řešitel nevysvětlí nenulovost x); 1 bod za výpočet rozměrů původního kvádru.