65. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Prvočíslo nazveme *pěkné*, jestliže je lze zapsat jako rozdíl dvou třetích mocnin přirozených čísel. Určete poslední číslice všech pěkných prvočísel.

2. Kladná reálná čísla a, b, c, d splňují rovnosti

$$a = c + \frac{1}{d} \quad \text{a} \quad b = d + \frac{1}{c}.$$

Dokažte nerovnost $ab \geqq 4$ a najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $ab + cd$.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ve kterém platí $|BC| = |AB| + |CD|$. Dokažte, že

(i) na rameni AD leží bod kružnice nad průměrem BC,

(ii) na rameni BC leží bod kružnice nad průměrem AD.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 8. prosince 2015

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Nejprve si všimněme, že $5^3 - 4^3 = 61$, $2^3 - 1^3 = 7$ a $3^3 - 2^3 = 19$ jsou vesměs pěkná prvočísla, takže 1, 7 a 9 patří k hledaným posledním číslicím. Ukážeme, že jiné číslice jako poslední stát nemohou.

Zvolme si pěkné prvočíslo p a zapišme je jako $m^3 - n^3$, kde $m > n$ jsou přirozená čísla. Podle známého vzorce pak

$$p = m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2),$$

a jelikož je druhá závorka větší než 1, znamená to, že musí být $m = n+1$ (jinak bychom prvočíslo p rozložili na součin dvou činitelů větších než 1). Po dosazení vyjde, že

$$p = 3n^2 + 3n + 1. \tag{1}$$

Jelikož $3n^2+3n+1 > 6$, musí být prvočíslo p liché a různé od pěti. Tím jsme vyloučili 0, 2, 4, 5, 6 a 8 coby možné poslední číslice, a zbývá tak už jen vyloučit číslici 3.

K tomu jistě postačí zjistit, jaké zbytky při dělení pěti dávají čísla tvaru $3n^2+3n+1$. Dosazením jednotlivých zbytků 0, 1, 2, 3 a 4 do (1) postupně vyjdou zbytky 1, 2, 4, 2, 1, čímž je zbytek 3 skutečně vyloučen.

Odpověď. Poslední číslice pěkných prvočísel jsou právě jen 1, 7 a 9.

Poznámka. Odvození vztahu (1) není nezbytné. Po zjištění poznatku $m = n+1$ stačí totiž vyhledat možné číslice rozdílů třetích mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. K tomu nejprve sestavíme tabulku posledních číslic čísel k a k^3:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Vidíme tak, že poslední číslice rozdílů $(k + 1)^3 - k^3$ jsou

$$1 - 0,\ 8 - 1,\ 17 - 8,\ 14 - 7,\ 5 - 4,\ 6 - 5,\ 13 - 6,\ 12 - 3,\ 9 - 2,\ 10 - 9,$$

tedy jedině číslice 1, 7 a 9. (I tak je ovšem nezbytné příklady pěkných prvočísel s těmito posledními číslicemi doložit.)

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení pěkných prvočísel končících každou z číslic 1, 7 a 9 udělte dohromady 1 bod. Jakýkoli správný argument vedoucí k vyloučení každé z číslic 0, 2, 4, 5, 6 a 8 oceňte rovněž jedním bodem. Další dva body udělte za odvození, že hledaná prvočísla mají tvar $3n^2 + 3n + 1$. Zbylé dva body pak za dokončení řešení. Při postupu z poznámky naopak 1 bod strhněte, pokud řešitel opomine uvést odpovídající příklady pěkných prvočísel.

2. Pro důkaz nerovnosti $ab \geqq 4$ dosaďme ze zadaných vztahů. Získáme tak odhad

$$ab = \Big(c + \frac{1}{d}\Big)\Big(d + \frac{1}{c}\Big) = cd + 1 + 1 + \frac{1}{cd} \geqq 4,$$

kde jsme v poslední nerovnosti využili známého faktu, že pro kladná čísla x (tedy i pro $x = cd > 0$) platí $x + 1/x \geqq 2$.

V druhé části úlohy budeme postupovat obdobně. Dosazením za a a b vyjde

$$ab + cd = \left(2 + cd + \frac{1}{cd}\right) + cd = 2 + 2cd + \frac{1}{cd}.$$

Tentokrát využijeme nerovnost $x + y \geqq 2\sqrt{xy}$, která platí pro libovolná nezáporná čísla x, y. Zvolíme-li v ní $x = 2cd$, $y = 1/cd$, obdržíme

$$2cd + \frac{1}{cd} \geqq 2\sqrt{2}.$$

Vidíme, že $ab+cd \geqq 2(1+\sqrt{2})$. Abychom se přesvědčili, že se jedná o hledané minimum, nalezneme přípustné hodnoty čísel a, b, c, d, pro něž v této nerovnosti nastane rovnost.

Vyjdeme z toho, že v použité nerovnosti nastává rovnost, právě když $x = y$ neboli $2cd = 1/cd$, což lze upravit na $(cd)^2 = 1/2$. To zajistíme například volbou $c = 1$, $d = \sqrt{2}/2$ a k těmto hodnotám pak ze zadaných vztahů dopočítáme $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}/2$. Sestrojená čtveřice tak splňuje podmínky ze zadání a zároveň pro ni platí $ab + cd = 2(1 + \sqrt{2})$. Můžeme si tedy být jisti, že hodnota $2(1 + \sqrt{2})$ je hledaným minimem výrazu $ab + cd$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za řešení první části udělte dva body. V části druhé udělte tři body za důkaz nerovnosti $ab + cd \geqq 2(1 + \sqrt{2})$ a jeden bod za sestrojení čtveřice hodnot a, b, c, d, pro niž je $ab + cd = 2(1 + \sqrt{2})$. Použité nerovnosti $x + 1/x \geqq 2$ a $x + y \geqq 2\sqrt{xy}$ (z nichž první plyne z druhé volbou $y = 1/x$) není nutné dokazovat, stačí je buď označit za známé, nebo se odvolat na nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou čísel.

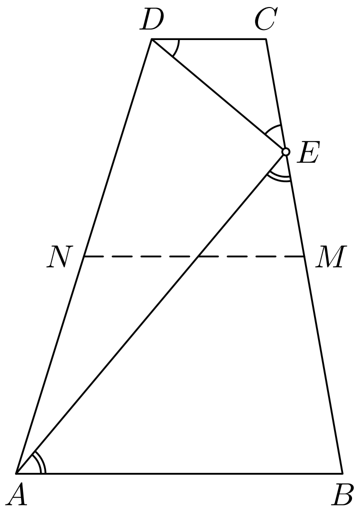
3. (i) Označme M, N po řadě středy ramen BC, AD. Ukážeme, že bod N leží na kružnici s průměrem BC.

Dosazením dané rovnosti do známého vztahu pro střední příčku lichoběžníku získáme rovnost

$$|MN| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{1}{2}|BC|.$$

To znamená, že vzdálenost bodu N od středu M kružnice nad průměrem BC je rovna jejímu poloměru. Bod N je tedy bodem kružnice nad průměrem BC.

(ii) S ohledem na zadanou podmínku existuje na straně BC bod E takový, že $|BE| = |AB|$ a $|EC| = |CD|$ (obr. 1). Ukážeme, že platí $|\sphericalangle AED| = 90°$, a bod E pak bude oním hledaným bodem na Thaletově kružnici nad průměrem AD.



Obr. 1

To ovšem plyne přímo z rovnoramennosti trojúhelníků ABE, ECD a rovnoběžnosti přímek AB a CD:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle AED| &= 180^\circ - |\sphericalangle AEB| - |\sphericalangle CED| = \\ &= \tfrac{1}{2}\big((180^\circ - 2|\sphericalangle AEB|) + (180^\circ - 2|\sphericalangle CED|)\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}(|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle DCE|) = 90^\circ.\end{aligned}$$

Jsme tedy hotovi.

Poznámka. Začneme-li celé řešení rovnou důkazem, že trojúhelník AED je pravoúhlý, můžeme si pak uvědomit, že navzájem kolmé osy jeho stran AE a ED procházejí středem N opsané kružnice. To však znamená, že i trojúhelník BCN je pravoúhlý, takže kružnice nad průměrem BC prochází středem N strany AD.

Za úplné řešení každé z částí udělte 3 body. V části (i) udělte jeden bod, pokud žák definuje bod N a zároveň projeví úmysl ukázat, že leží na kružnici s průměrem BC. Zbylé dva body udělte, pokud se mu to podaří. Část (ii) obodujte analogicky. V případě, že se žák pustí jinou cestou, mějte na paměti, že pro řešení každé z částí je potřeba využít podmínku ze zadání. Bez ní totiž ani jeden ze závěrů obecně vzato neplatí.