65. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Najděte všechny možné hodnoty součinu prvočísel p, q, r, pro která platí*

$$p^2 - (q+r)^2 = 637.$$

Řešení. Levou stranu dané rovnice rozložíme na součin podle vzorce pro $A^2 - B^2$. V takto upravené rovnici

$$(p+q+r)(p-q-r) = 637$$

už snadno probereme všechny možnosti pro dva celočíselné činitele nalevo. První z nich je větší a kladný, proto i druhý musí být kladný (neboť takový je jejich součin), takže podle rozkladu na prvočinitele čísla $637 = 7^2 \cdot 13$ jde o jednu z dvojic $(637, 1)$, $(91, 7)$ nebo $(49, 13)$. Prvočíslo p je zřejmě aritmetickým průměrem obou činitelů, takže se musí rovnat jednomu z čísel $\frac{1}{2}(637+1) = 319$, $\frac{1}{2}(91+7) = 49$, $\frac{1}{2}(49+13) = 31$. První dvě z nich však prvočísla nejsou ($319 = 11 \cdot 29$ a $49 = 7^2$), třetí ano. Je tedy nutně $p = 31$ a příslušné rovnosti $31 + q + r = 49$ a $31 - q - r = 13$ platí, právě když $q + r = 18$. Takové dvojice prvočísel $\{q, r\}$ jsou pouze $\{5, 13\}$ a $\{7, 11\}$ (stačí probrat všechny možnosti, nebo si uvědomit, že jedno z prvočísel q, r musí být aspoň $18 : 2 = 9$, nejvýše však $18 - 2 = 16$). Součin pqr tak má právě dvě možné hodnoty, totiž $31 \cdot 5 \cdot 13 = 2\,015$ a $31 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,387$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechna přirozená čísla a a b, pro něž je rozdíl $a^2 - b^2$ druhou mocninou některého prvočísla. [$a = (p^2+1)/2$ a $b = (p^2-1)/2$, kde p je libovolné liché prvočíslo.]

D1. Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel a, b, pro něž platí $a^2 + b + 2 = a + b^2$. [C59–S–3]

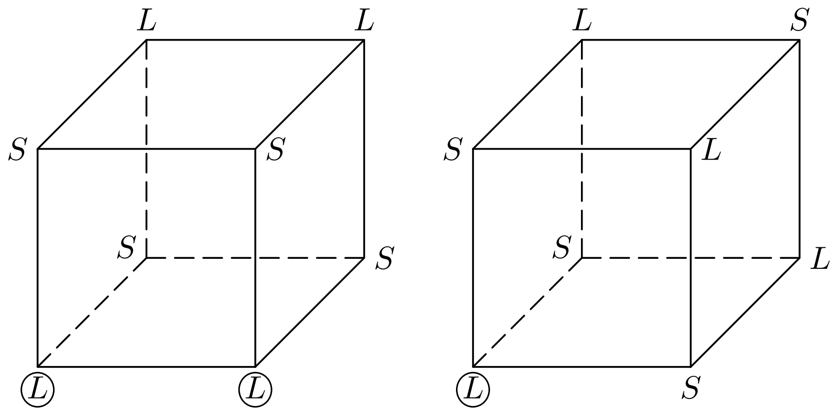
D2. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [C55–II–4]

2. *Určete, kolika způsoby lze k jednotlivým vrcholům krychle $ABCDEFGH$ připsat čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby součin čísel připsaných libovolným třem vrcholům každé ze stěn krychle byl sudý.*

Řešení. Pro kontrolu dotyčné podmínky stačí vědět pouze to, kterým vrcholům krychle $ABCDEFGH$ jsou připsána čísla lichá a kterým čísla sudá. Zaveďme proto znaky L a S pro všechna lichá, resp. sudá čísla a řešme nejprve otázku, kolika vyhovujícími způsoby lze připsat k vrcholům krychle $ABCDEFGH$ čtyři L a čtyři S (právě tolik jich totiž je mezi zadanými čísly 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4).

Uvědomme si, co nám podmínka úlohy říká o počtu znaků L připsaných vrcholům jedné a téže stěny krychle: počet těchto L je nejvýše 2 (součin tří připsaných L by byl totiž lichý, tedy v rozporu s danou podmínkou). Když však danou stěnu krychle uvážíme zároveň se stěnou s ní rovnoběžnou (tj. stěnou protější), u jejíchž vrcholů jsou také nejvýše dvě L, a zohledníme přitom, že u osmi vrcholů těchto dvou stěn (tedy u všech osmi vrcholů krychle) jsou (všechna) čtyři L, dojdeme k závěru, že *u vrcholů* *každé stěny jsou právě dvě L* (a tedy i dvě S). Naopak každé takové připsání čtyř L a čtyř S zřejmě vyhoví požadavkům úlohy.

Stojíme tak před úkolem určit počet těch připsání čtyř L a čtyř S vrcholům krychle $ABCDEFGH$, při nichž jsou dvě L a dvě S u vrcholů každé stěny. Rozdělíme je do dvou skupin podle toho, zda existuje stěna, v níž jsou obě L přiřazena vrcholům sousedním (na krychli tak vznikne aspoň jedna hrana „LL“), nebo naopak ve všech stěnách jsou obě L přiřazena vrcholům protějším (všechny hrany krychle pak budou „LS“). Po jednom zástupci obou skupin vidíme na obr. 1 — pro lepší přehled bez označení vrcholů krychle písmeny. Snadno ověříme (výklad zde vynecháme), že znaky v kroužku u zástupců obou skupin už jednoznačně určují znaky u všech ostatních vrcholů krychle.



Obr. 1

Nyní už snadno usoudíme, že v první skupině je právě šest přiřazení — jednou hranou „LL“ je totiž, jak víme, celé vyhovující přiřazení určeno a má právě dvě hrany „LL“, jež jsou přitom rovnoběžné a neleží v téže stěně; takových dvojic hran je na krychli $ABCDEFGH$ právě šest. Oproti tomu ve druhé skupině jsou pouze dvě různá přiřazení — protože jde o přiřazení bez hrany „LL“, znakem S nebo L u vrcholu A dané krychle jsou totiž, jak víme, určeny znaky u všech dalších jejích vrcholů. Existuje tak celkem $6+2=8$ vyhovujících přiřazení čtyř L a čtyř S vrcholům krychle $ABCDEFGH$.

V další, snazší části našeho postupu určíme, kolika způsoby můžeme čtyři L a čtyři S (pevně připsaná vrcholům krychle) zaměnit konkrétními čísly 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Máme zřejmě právě čtyři možnosti pro výběr toho L, které zaměníme číslem 1; poté už zbylá tři L musíme zaměnit číslem 3, stejně jako všechna čtyři S číslem 4. Počet způsobů záměn znaků L a S danými čísly je tak roven 4.

Nakonec uplatníme jednoduché kombinatorické *pravidlo součinu*: protože existuje osm vyhovujících připsání znaků L a S k vrcholům dané krychle a při každém z nich lze čtyřmi způsoby zaměnit znaky L a S danými čísly, je hledaný počet vyhovujících připsání daných čísel vrcholům dané krychle roven $8 \times 4 = 32$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kolika způsoby lze vrcholům čtverce $ABCD$ a jeho středu S připsat čísla 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby byly *vesměs liché* součty čísel u každé jeho strany i obou úhlopříček? Dokážete tento počet určit, aniž vypíšete všechny možnosti a pak je spočítáte? [24 způsobů. Nejprve připište daným pěti bodům 3 znaky L a dva znaky S pro lichá, resp. sudá čísla — to lze udělat právě dvěma vyhovujícími způsoby. Pak uvažte, že znaky L lze zaměnit danými čísly šesti způsoby a znaky S dvěma způsoby.]

D1. Kolika způsoby lze vrcholům pravidelného devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ přiřadit čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bylo přiřazeno jinému vrcholu a aby součet čísel přiřazených každým třem sousedním vrcholům byl dělitelný třemi? [B61–II–2]

3. *Uvažujme výraz*

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4.$$

a) Najděte všechna reálná čísla x a y, pro něž daný výraz nabývá své nejmenší hodnoty.

b) Určete všechny dvojice celých nezáporných čísel x a y, pro které je hodnota daného výrazu rovna číslu 16.

Řešení. Daný výraz $V(x, y)$ upravme podle vzorců pro $(A \pm B)^2$:

$$V(x, y) = \bigl(x^2 - 2xy + y^2\bigr) + \bigl(x^2 + 2x + 1\bigr) + 3 = (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 3.$$

a) První dva sčítance v posledním součtu jsou druhé mocniny, mají tedy nezáporné hodnoty. Minimum jistě nastane v případě, když pro některá x a y budou oba základy rovny nule (v tom případě pro jinou dvojici základů už bude hodnota výrazu $V(x, y)$ větší). Obě rovnosti $x - y = 0$, $x + 1 = 0$ současně skutečně nastanou, a to zřejmě pouze pro hodnoty $x = y = -1$. Dodejme (na to se zadání úlohy neptá), že $V_{\min} = V(-1, -1) = 3$.

Odpověď. Daný výraz nabývá své nejmenší hodnoty pouze pro $x = y = -1$.

b) Podle úpravy z úvodu řešení platí

$$V(x, y) = 16 \;\Leftrightarrow\; (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 3 = 16 \;\Leftrightarrow\; (x - y)^2 + (x + 1)^2 = 13.$$

Oba sčítanci $(x - y)^2$ a $(x + 1)^2$ jsou (pro celá nezáporná čísla x a y) z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Jeden proto zřejmě musí být 4 a druhý 9. Vzhledem k předpokladu $x \geqq 0$ je základ $x + 1$ mocniny $(x + 1)^2$ kladný, musí proto být roven 2 nebo 3 (a nikoli -2 či -3). V prvním případě, tj. pro $x = 1$, pak pro základ mocniny $(x - y)^2$ dostáváme podmínku $1 - y = \pm 3$, tedy $y = 1 \mp 3$ neboli $y = 4$ (hodnota $y = -2$ je zadáním části b) vyloučena). Ve druhém případě, kdy $x = 2$, obdržíme podobně z rovnosti $x - y = 2 - y = \pm 2$ dvě vyhovující hodnoty $y = 0$ a $y = 4$.

Odpověď. Všechny hledané dvojice (x, y) jsou $(1, 4)$, $(2, 0)$ a $(2, 4)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro libovolná reálná čísla x, y a z dokažte nezápornost hodnoty každého z výrazů

$$x^2z^2 + y^2 - 2xyz, \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 2x - 12y - 6z + 13, \quad 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz$$

a zjistěte rovněž, kdy je dotyčná hodnota rovna nule.

D1. V oboru celých čísel řešte rovnici $x^2 + y^2 + x + y = 4$. [B61–S–1]

D2. Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2 + ab \leqq ac + bc$. [C63–II–3]

D3. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí $(a + bc)(b + ac) \geqq ab(c + 1)^2$. Zjistěte, kdy nastane rovnost. [C58–S–1]

D4. Uvažujme výraz $V(x) = (5x^4 - 4x^2 + 5)/(x^4 + 1)$.
   a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
   b) Najděte největší hodnotu $V(x)$. [C58–II–1]

D5. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[C58-I-6]

4. *Uvnitř stran AB, AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body E, F, přičemž $EF \parallel BC$. Úsečka EF je pak rozdělena bodem D tak, že platí*

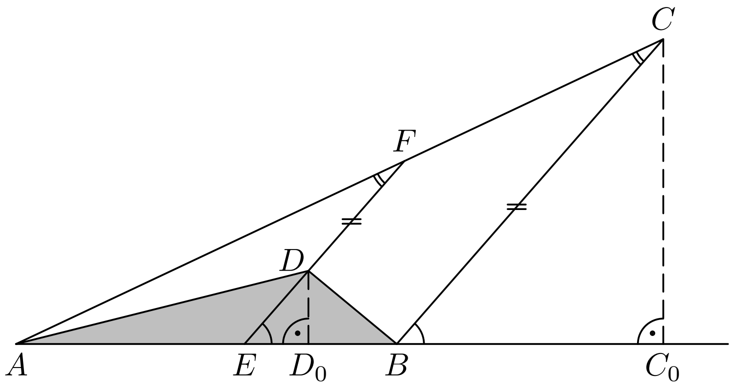
$$p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|.$$

a) Ukažte, že poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD je pro $p = 2 : 3$ stejný jako pro $p = 3 : 2$.
b) Zdůvodněte, proč poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD má hodnotu nejméně 4.

Řešení. Pro společnou hodnotu p obou poměrů ze zadání platí

$$|ED| = p|DF| \quad \text{a zároveň} \quad |BE| = p|EA|. \tag{1}$$

Před vlastním řešením obou úkolů a) a b) vyjádříme pomocí daného čísla p zkoumaný poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD. Ten je roven — protože trojúhelníky mají společnou stranu AB — poměru délek jejich výšek CC_0 a DD_0 (obr. 2), který je stejný



Obr. 2

jako poměr délek úseček BC a ED, a to na základě podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BCC_0 a EDD_0 podle věty *uu* (uplatněné díky $BC \parallel ED$).[1] Platí tedy rovnost

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{|BC|}{|ED|}. \tag{2}$$

Vraťme se nyní k rovnostem (1), podle kterých

$$|EF| = (1 + p)|DF| \quad \text{a} \quad |AB| = (1 + p)|EA|,$$

a povšimněme si, že trojúhelníky ABC a AEF mají společný úhel u vrcholu A i shodné úhly u vrcholů C a F (neboť $BC \parallel EF$), takže jsou podle věty *uu* podobné. Proto pro délky jejich stran platí

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EF|} \quad \text{neboli} \quad 1 + p = \frac{|BC|}{(1 + p)|DF|}, \quad \text{odkud} \quad |BC| = (1 + p)^2|DF|.$$

[1] V případě pravých úhlů ABC a AED to platí triviálně, neboť tehdy $B = C_0$ a $E = D_0$.

Vydělíme-li poslední vztah hodnotou $|ED|$, jež je rovna $p|DF|$ podle (1), získáme podíl z pravé strany (2) a tím i hledané vyjádření

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{(1+p)^2}{p}. \tag{3}$$

a) Algebraickou úpravou zlomku ze vzorce (3)

$$\frac{(1+p)^2}{p} = \frac{1+2p+p^2}{p} = 2 + p + \frac{1}{p}$$

zjišťujeme, že hodnota poměru $S_{ABC} : S_{ABD}$ je pro jakékoli dvě navzájem převrácené hodnoty p a $1/p$ stejná, tedy nejen pro hodnoty $2/3$ a $3/2$, jak jsme měli ukázat.

b) Podle vzorce (3) je naším úkolem ověřit pro každé $p > 0$ nerovnost

$$\frac{(1+p)^2}{p} \geqq 4 \quad \text{neboli} \quad (1+p)^2 \geqq 4p.$$

To je však zřejmě ekvivalentní s nerovností $(1-p)^2 \geqq 0$, která skutečně platí, ať je základ druhé mocniny jakýkoli (rovnost nastane jedině pro $p = 1$).

Dodejme, že k jinému důkazu bylo možné využít i výše uvedené „symetrické“ vyjádření

$$\frac{(1+p)^2}{p} = 2 + p + \frac{1}{p}$$

a uplatnit k němu dobře známou nerovnost $p + 1/p \geqq 2$, jejíž platnost pro každé $p > 0$ plyne také ze srovnání aritmetického a geometrického průměru dvojice čísel p a $1/p$, zvaného AG-nerovnost:

$$\frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) \geqq \sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 1, \quad \text{neboť obecně} \quad \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a \cdot b} \quad (\forall a, b \geqq 0).$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Vymyslete pravidlo, jak jednoduše vyjádřit poměr obsahů dvou trojúhelníků, které se shodují v jedné straně či v jedné výšce. Uplatněte je pak k řešení úloh N2 a N3.

N2. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě P. Obsahy trojúhelníků ABP, BCP, CDP, DAP označme po řadě S_1, S_2, S_3, S_4. Dokažte obecnou rovnost $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ a vysvětlete, proč speciální rovnost $S_2 = S_4$ nastane, právě když $AB \parallel CD$. [U první rovnosti přejděte k úměře $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$, u druhé k rovnosti obsahů trojúhelníků ABC a ABD.]

N3. Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L, M tak, že úsečky AK, BL, CM se protínají v jednom bodě P. Dokažte, že oba výrazy

$$\frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} \cdot \frac{|AM|}{|MB|} \quad \text{a} \quad \frac{|PK|}{|AK|} + \frac{|PL|}{|BL|} + \frac{|PM|}{|CM|}$$

se rovnají číslu 1. [Pro první výraz vyjádřete vhodně poměry obsahů trojúhelníků ABP, BCP a CAP. Vyjádříte-li pak, jakými jsou částmi obsahu celého trojúhelníku ABC, a tyto tři zlomky sečtete, dostanete tvrzení o hodnotě druhého výrazu.]

D1. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED, BD po řadě v bodech F, G. Určete postupný poměr $|AF| : |FG| : |GC|$. [C64–I–4]

D2. Označme K a L po řadě body stran BC a AC trojúhelníku ABC, pro které platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nechť M je průsečík úseček AK a BL. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníků ABM a ABC. [C64–S–2]

D3. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [C55–II–1]

5. *Máme kartičky s čísly 5, 6, 7, ..., 55 (na každé kartičce je jedno číslo). Kolik nejvýše kartiček můžeme vybrat tak, aby součet čísel na žádných dvou vybraných kartičkách nebyl palindrom? (Palindrom je číslo, které je stejné při čtení zleva doprava i zprava doleva.)*

Řešení. Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, budeme vybírat přímo *čísla*, a ne *kartičky.*

Povšimněme si předně, že pro součet s libovolných dvou daných čísel platí $11 = 5 + 6 \leqq s \leqq 55 + 54 = 109$. Mezi čísly od 11 do 109 jsou palindromy právě *všechny* násobky 11 a navíc i číslo 101. Uvědomme si nyní, že dělitelnost součtu dvou čísel daným číslem d (nám půjde o hodnotu $d = 11$) závisí pouze na zbytcích obou sčítaných čísel při dělení dotyčným d. Toto užitečné pravidlo uplatníme tak, že všechna daná čísla od 5 do 55 rozdělíme do skupin podle jejich zbytků při dělení číslem 11 a tyto skupiny zapíšeme do řádků tak, aby součet dvou čísel z různých skupin na stejném řádku byl dělitelný číslem 11; o významu závorek na konci každého řádku pojednáme vzápětí.

$$\begin{array}{lll}
\{5,16,27,38,49\}, & \{6,17,28,39,50\} & \text{(5 čísel)},\\
\{7,18,29,40,51\}, & \{15,26,37,48\} & \text{(5 čísel)},\\
\{8,19,30,41,52\}, & \{14,25,36,47\} & \text{(5 čísel)},\\
\{9,20,31,42,53\}, & \{13,24,35,46\} & \text{(5 čísel)},\\
\{10,21,32,43,54\}, & \{12,23,34,45\} & \text{(5 čísel)}
\end{array}$$

$$\{11,22,33,44,55\} \quad \text{(1 číslo)}.$$

Na konci každého řádku jsme připsali maximální počet na něm zapsaných čísel, která můžeme současně vybrat, aniž by součet dvou z nich byl násobkem čísla 11. Kupříkladu v třetím řádku máme pětici čísel se zbytkem 8 a čtveřici čísel se zbytkem 3. Je jasné, že nemůžeme současně vybrat po čísle z obou těchto skupin (jejich součet by byl násobkem 11), můžeme však vybrat současně všech pět čísel z pětice (součet každých dvou z nich bude při dělení 11 dávat stejný zbytek jako součet $8 + 8$, tedy zbytek 5). Dodejme ještě, že uvedené schéma šesti řádků má pro nás ještě jednu obrovskou výhodu: součet žádných dvou čísel z *různých* řádků není násobkem 11 (tím totiž není ani součet jejich dvou zbytků).

Z uvedeného rozdělení všech daných čísel do šesti řádků plyne, že vyhovujícím způsobem nemůžeme vybrat více než $5 \cdot 5 + 1 = 26$ čísel. Kdybychom však vybrali 26 čísel, muselo by mezi nimi být i jedno z čísel 49 nebo 50 a z dalších čtyř řádků po řadě čísla 51, 52, 53 a 54 — pak bychom ovšem dostali palindrom $49+52$ nebo $50+51$. A tak nelze vybrat více než 25 čísel, přitom výběr 25 čísel možný je: na prvních pěti řádcích vybereme například všechna čísla z levých skupin s výjimkou čísla 52 a k tomu jedno číslo (třeba 11) z posledního řádku. Pak součet žádných dvou vybraných čísel nebude dělitelný 11 (díky zařazení čísel do skupin), natož pak roven poslednímu „kritickému“ číslu, palindromu 101 (proto jsme při volbě čísla 49 vyřadili 52).

Odpověď. Největší možný počet kartiček, které můžeme požadovaným způsobem vybrat, je roven číslu 25.

Jiné řešení. Mezi vybranými čísly může být

▷ jen jedno číslo z pětice $(11, 22, 33, 44, 55)$;

- ▷ nejvýše jedno číslo z každé z 20 následujících dvojic $(5,6)$, $(7,15)$, $(8,14)$, $(9,13)$, $(10,12)$, $(16,17)$, $(18,26)$, $(19,25)$, $(20,24)$, $(21,23)$, $(27,28)$, $(29,37)$, $(30,36)$, $(31,35)$, $(32,34)$, $(38,39)$, $(40,48)$, $(41,47)$, $(42,46)$ a $(43,45)$;[2]
- ▷ nejvýše dvě čísla ze čtveřice $(49,50,51,52)$ (neboť součty $49+50$, $50+51$ a $49+52$ jsou palindromy);
- ▷ obě zbylá čísla 53 a 54.

Proto nelze požadovaným způsobem vybrat více než $1+20+2+2=25$ čísel. Vyhovující výběr 25 čísel je možný: jedno číslo z pětice násobků 11, menší ze dvou čísel v každé z 20 dvojic, čísla 49 a 51 ze čtveřice a konečně obě čísla 53 a 54. Je ovšem třeba vysvětlit, proč součet žádných dvou vybraných čísel není násobkem 11 (proč není roven 101, je patrné hned). K tomu si stačí všimnout, že menší čísla z 20 dvojic dávají při dělení jedenácti postupně zbytky, které se opakují s periodou délky 5, jež má složení $(5,7,8,9,10)$, konečně poslední čtyři vybraná čísla mají po řadě zbytky 5, 7, 9 a 10, takže součet žádných dvou zbytků námi vybraných čísel skutečně není násobkem 11. (Souhrou okolností jde o stejný příklad vyhovujícího výběru 25 čísel jako v původním řešení.)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Z množiny $\{1,2,3,\dots,99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje. [C58–I–5]

D1. Z množiny $\{1,2,3,\dots,99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.
  a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
  b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26. [C58–II–3]

6. *Je dána kružnice $k_1(A; 4\,\mathrm{cm})$, její bod B a kružnice $k_2(B; 2\,\mathrm{cm})$. Bod C je středem úsečky AB a bod K je středem úsečky AC. Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku KLM, jehož vrchol L je jeden z průsečíků kružnic k_1, k_2 a jehož přepona KM leží na přímce AB.*

Řešení. Poznamenejme především, že s ohledem na osovou souměrnost podle přímky AB je jedno, který z obou průsečíků kružnic k_1 a k_2 vybereme za bod L.

Hledaný obsah trojúhelníku KLM vyjádříme nikoli pomocí délek jeho odvěsen KL a LM, nýbrž pomocí délek jeho přepony KM a k ní příslušné výšky LD (obr. 3 vlevo), tedy užitím vzorce[3]

$$S_{KLM} = \frac{|KM|\cdot|LD|}{2}.$$

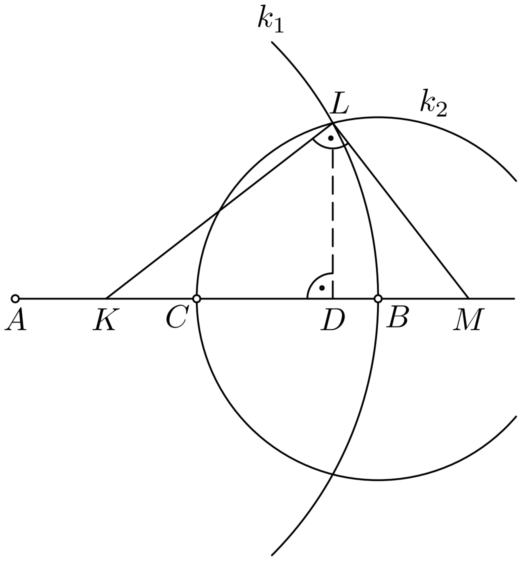
K určení vzdáleností bodu D od bodů B a L uvažme ještě střed S úsečky BL (obr. 3 vpravo). Trojúhelníky ASB a LDB jsou oba pravoúhlé se společným ostrým úhlem při vrcholu B. Jsou proto podle věty *uu* podobné, tudíž pro poměr jejich stran platí (počítáme s délkami bez jednotek, takže podle zadání je $|AB|=4$, $|BL|=2$, a proto $|BS|=|BL|/2=1$)

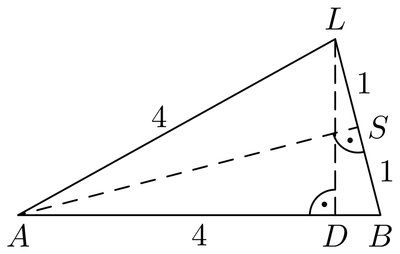
$$\frac{|BD|}{|BS|} = \frac{|BL|}{|BA|} = \frac{2}{4}, \quad \text{odkud} \quad |BD| = \frac{1}{2}|BS| = \frac{1}{2}.$$

---

[2] Tyto dvojice se součty dělitelnými číslem 11 jsme vytvořili postupně ze zbylých čísel tak, že k nejmenšímu dosud nezapsanému číslu jsme připojili další nejmenší dosud nezapsané číslo, které „doplňuje“ první číslo do nějakého násobku 11. Takovému postupu se zejména v matematické informatice říká *hladový algoritmus*.

[3] Výpočet délky odvěsny LM bez mezivýpočtu výšky LD je totiž prakticky nemožný.





Obr. 3

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník LDB tak plyne[4]

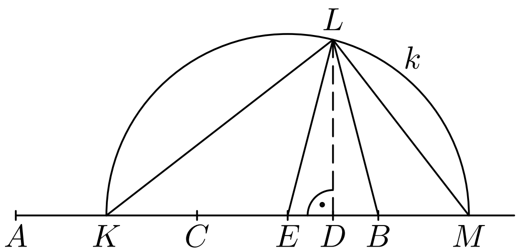
$$|LD| = \sqrt{|BL|^2 - |BD|^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Z rovnosti $|BD| = 1/2$ již také odvodíme délku úseku KD přepony KM pravoúhlého trojúhelníku KLM, totiž $|KD| = |AB| - |AK| - |BD| = 4 - 1 - 1/2 = 5/2$. Délku druhého úseku DM nyní určíme z Eukleidovy věty o výšce, podle které $|LD|^2 = |KD| \cdot |DM|$. Obdržíme tak $|DM| = |LD|^2/|KD| = (15/4)/(5/2) = 3/2$, takže celá přepona KM má délku $|KM| = |KD| + |DM| = 5/2 + 3/2 = 4$. Dosazením do vzorce z úvodu řešení tak dojdeme k výsledku

$$S_{KLM} = \frac{|KM| \cdot |LD|}{2} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}}{2} = \sqrt{15}.$$

Odpověď. Trojúhelník KLM má obsah $\sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Narýsujeme-li přesně obě kružnice k_1, k_2 a odpovídající bod M, pojmeme podezření, že $|KM| = |AB|$ a bod L je takový bod Thaletovy kružnice k nad průměrem KM se středem E, který leží na ose úsečky EB (obr. 4). Skutečně, při



Obr. 4

[4] Jinou možností pro výpočet výšky LD na rameno AB rovnoramenného trojúhelníku ABL je vypočítat jeho výšku AS na základnu BL (užitím Pythagorovy věty k trojúhelníku ABS) a poté porovnat dvojí vyjádření obsahu trojúhelníku ABL přes jeho výšky AS a LD.

popsané volbě bodu M a konstrukci bodu L bude platit $|BL| = |EL| = 2\,\mathrm{cm}$, takže abychom se přesvědčili, že jde opravdu o bod L ze zadání úlohy, stačí ověřit, že je i $|AL| = |AB| = 4\,\mathrm{cm}$. Protože (psáno bez jednotek) $|EM| = 2$, $|BM| = |AK| = 1$, a tudíž $|BD| = |ED| = \frac{1}{2}$ a $|AD| = \frac{7}{2}$, podle Pythagorovy věty použité postupně na pravoúhlé trojúhelníky BDL a ADL pro takto sestrojený bod L máme

$$|DL|^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}, \qquad |AL|^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2.$$

Tím je naše hypotéza ověřena. Obsah trojúhelníku KLM už spočteme snadno:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}|KM| \cdot |LD| = 2|DL|\,\mathrm{cm} = \sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Zopakujte si Eukleidovy věty o odvěsně a o výšce pravoúhlého trojúhelníku a připomeňte si jejich důkazy na základě podobnosti daného trojúhelníku s dvěma menšími trojúhelníky, které vzniknou jeho rozdělením pomocí výšky ku přeponě.

D1. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l. [C59–S–2]

D2. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [C58–II–4]