

## II. kolo kategorie Z6

## Z6–II–1

Paní učitelka napsala na tabuli dvě čísla pod sebe a vyvolala Adama, aby je sečetl. Adam je správně sečetl a výsledek 39 napsal pod zadaná čísla. Paní učitelka smazala nejvrchnější číslo, a tak zbylá dvě čísla vytvořila nový příklad na sčítání. Tentokrát správný výsledek zapsala pod čísla Bára. Paní učitelka opět smazala nejvrchnější číslo, nově vzniklý příklad na sčítání správně vypočetl Čeněk a vyšlo mu 96.

Určete dvě čísla, která byla původně napsána na tabuli. (L. Šimůnek)

**Možné řešení.** Znázorníme si všech pět čísel v pořadí, jak byla psána na tabuli (hvězdičky označují zatím neznámé číslice):

$$\begin{array}{r} * * \\ * * \\ 39 \\ * * \\ 96 \end{array}$$

V posledně řešeném příkladu na sčítání  $39 + ** = 96$  chybí pouze jeden člen; číslo na 4. řádku je tedy  $96 - 39 = 57$ .

Tím dostáváme obdobnou situaci v příkladu  $** + 39 = 57$ ; číslo na 2. řádku je tedy  $57 - 39 = 18$ . Podobně doplníme chybějící člen prvního příkladu:  $39 - 18 = 21$ .

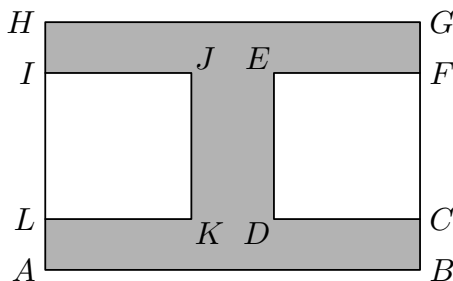
Na tabuli byla původně napsána čísla 21 a 18.

**Návrh hodnocení.** Po 1 bodu za každé neznámé číslo; 2 body podle kvality vysvětlení; 1 bod za správně formulovaný závěr.

## Z6–II–2

Uvnitř obdélníku  $ABGH$  jsou dva shodné čtverce  $CDEF$  a  $IJKL$ . Strana  $CF$  prvního čtverce leží na straně  $BG$  obdélníku a strana  $IL$  druhého z nich leží na straně  $HA$  obdélníku. Obvod osmiúhelníku  $ABCDEFGH$  je 48 cm, obvod dvanáctiúhelníku  $ABCDEFGHIJKL$  je 58 cm. Tento dvanáctiúhelník je souměrný podle vodorovné osy a délky všech jeho stran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly.

Určete délky stran obdélníku  $ABGH$ . (L. Šimůnek)



**Možné řešení.** Značné části obvodů osmiúhelníku  $ABCDEFGH$  a dvanáctiúhelníku  $ABCDEFGHIJKL$  jsou oběma obrazcům společné. Zato úsečky  $IJ$ ,  $JK$  a  $KL$  jsou součástí pouze obvodu dvanáctiúhelníku a úsečka  $IL$  je součástí pouze obvodu osmiúhelníku. Tyto čtyři úsečky jsou navzájem shodné, jejich délku označíme  $a$ . Rozdíl obvodů obrazců  $58 - 48 = 10$  (cm) tedy odpovídá dvěma  $a$ ; tzn.  $a = 5$  cm.

Podobně rozdíl mezi obvodem osmiúhelníku  $ABCDEFGH$  a obvodem obdélníku  $ABGH$  je roven dvěma  $a$ , neboli 10 cm. Proto je obvod obdélníku roven  $48 - 10 = 38$  (cm) a součet délek jeho stran je  $38 : 2 = 19$  (cm).

Vzhledem k tomu, že obrazec je souměrný podle vodorovné osy, musí být úsečky  $AL$ ,  $BC$ ,  $FG$  a  $IH$  shodné. Vzhledem k tomu, že délky všech stran dvanáctiúhelníku jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly, mohou délky stran obdélníku  $ABGH$  nabývat pouze následujících hodnot (v cm):

$$|AB| = 11, 12, 13, \dots,$$

$$|BG| = 7, 9, 11, \dots$$

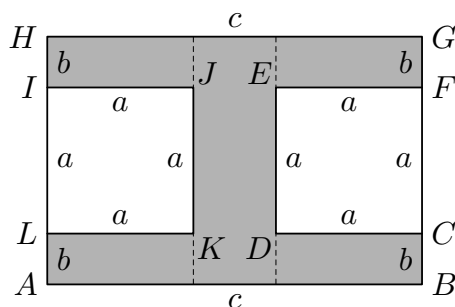
Aby byl součet těchto délek roven 19, musí být délky stran obdélníku  $ABGH$  12 cm a 7 cm.

**Poznámka.** Pokud délku shodných úseček  $AL$ ,  $BC$ ,  $FG$  a  $IH$  označíme  $b$  a délku shodných úseček  $KD$  a  $EJ$  označíme  $c$ , potom lze obvod dvanáctiúhelníku vyjádřit takto:

$$10a + 4b + 2c = 58,$$

$$4b + 2c = 8.$$

Délky všech stran dvanáctiúhelníku (v cm) jsou celočíselné, proto jsou  $b$  a  $c$  celočíselné a zřejmě také kladné. Úloha má tedy jediné řešení:  $b = 1$  a  $c = 2$ . Délky stran obdélníku  $ABGH$  jsou  $2a + c = 12$  (cm) a  $2b + a = 7$  (cm).



**Návrh hodnocení.** 3 body za délku strany čtverce  $a$  (z toho 1 bod za zdůvodnění); 2 body za vztah  $|AB| + |BG| = 19$  cm nebo jeho obdobu (např.  $4b + 2c = 8$ ); 1 bod za vyčíslení a správný závěr.

### Z6–II–3

Na Černíčkově statku měli tři slepice. První snášela každý den jedno vejce, druhá snášela každý druhý den jedno vejce a třetí každý třetí den jedno vejce. Pan Černíček přikoupil na trhu dvě nové slepice, které také snášely vajíčka naprosto pravidelně — vždy jedno po několika dnech, přičemž jedna z nich snášela dvakrát více než druhá.

Paní Černíčková spočítala, že všech pět slepic sneslo za 60 dní celkem 155 vajec. Jak často snášely nové slepice? (L. Hozová)

**Možné řešení.** První stará slepice snášela každý den jedno vejce, tj. za 60 dní 60 vajec. Druhá stará slepice snášela každý druhý den jedno vejce, tj. za 60 dní 30 vajec. Třetí stará slepice snášela každý třetí den jedno vejce, tj. za 60 dní 20 vajec. Staré slepice snesly za 60 dní celkem  $60 + 30 + 20 = 110$  vajec.

Staré i nové slepice snesly za 60 dní celkem 155 vajec, tedy jenom nové slepice snesly za 60 dní celkem  $155 - 110 = 45$  vajec. Přitom jedna z nových slepic snášela dvakrát víc než ta druhá. Rozdělením 45 na tři stejné díly zjišťujeme, že jedna nová slepice snesla za 60 dní 15 vajec, tzn. jedno vejce každý čtvrtý den ( $60 : 15 = 4$ ). Druhá nová slepice tak snesla za 60 dní 30 vajec, tzn. jedno vejce každý druhý den.

**Návrh hodnocení.** 2 body za celkový počet vajec, které snesly tři staré slepice za 60 dní; 1 bod za celkový počet vajec, které snesly dvě nové slepice za 60 dní; 1 bod za rozdělení vajec od nových slepic na tři stejné díly; 2 body za určení snůšky nových slepic.