II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

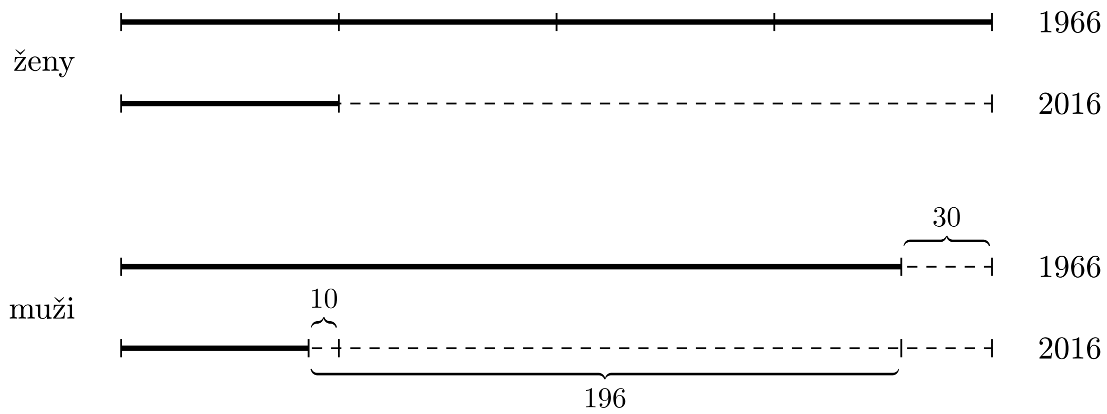
V roce 1966 žilo v obci Bezdíkov o 30 žen více než mužů. Do současnosti se počet žen žijících v obci zmenšil čtyřikrát a počet mužů žijících v obci klesl o 196. Nyní je v Bezdíkově o 10 žen více než mužů.

Kolik žen a mužů dohromady žije v současnosti v Bezdíkově? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Rozdíl původního počtu žen a současného počtu mužů je $30 + 196 = 226$, což je o 10 více než rozdíl původního a současného počtu žen. To znamená, že tři čtvrtiny původního počtu žen jsou rovny $226 - 10 = 216$. Zbývající jedna čtvrtina odpovídající aktuálnímu počtu žen je tedy $216 : 3 = 72$. Mužů je nyní $72 - 10 = 62$.

V obci nyní žije celkem $62 + 72 = 134$ mužů a žen.

Předchozí úvahy můžeme graficky znázornit takto:



Poznámka. Aktuální počet žen lze určit algebraicky řešením rovnice. Pokud tento počet označíme z, potom původní počet žen byl $4z$, aktuální počet mužů je $z - 10$ a původní počet mužů byl $4z - 30$. Rozdíl původního a současného počtu mužů je 196, tedy:

$$
\begin{aligned}
(4z - 30) - (z - 10) &= 196,\\
3z - 20 &= 196,\\
z &= 72.
\end{aligned}
$$

Návrh hodnocení. 2 body za aktuální počet žen; 1 bod za správný závěr; 3 body podle kvality vysvětlení.

Z7–II–2

Paní učitelka napsala na tabuli dvě čísla pod sebe a vyvolala Kláru, aby je sečetla. Klára správný výsledek zapsala pod zadaná čísla. Paní učitelka smazala nejvrchnější číslo, a tak zbylá dvě čísla vytvořila nový příklad na sčítání. Tentokrát správný výsledek zapsal pod čísla Lukáš. Paní učitelka opět smazala nejvrchnější číslo, nově vzniklý příklad na sčítání správně vypočetla Magda a vyšlo jí 94.

Jedno ze dvou čísel, která paní učitelka původně napsala na tabuli, bylo 14, ale neprozradíme které. Jaké mohlo být druhé z původně napsaných čísel? Určete všechny možnosti.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. První číslo napsané na tabuli označíme x, druhé y. Klára napsala součet

$$x + y,$$

Lukáš doplnil

$$y + (x + y) = x + 2y$$

a nakonec Magda přidala

$$(x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y.$$

Hodnota posledně uvedeného součtu je 94. Zadání nestanovuje, která z neznámých x a y je 14, probereme obě možnosti:

a) Pokud $x = 14$, potom

$$\begin{aligned} 2 \cdot 14 + 3y &= 94, \\ 3y &= 66, \\ y &= 22. \end{aligned}$$

b) Pokud $y = 14$, potom

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 14 &= 94, \\ 2x &= 52, \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Na počátku mohlo být na tabuli kromě čísla 14 napsáno číslo 22 nebo 26.

Poznámka. Předchozí dvě možnosti můžeme uvažovat na samém začátku. Potom součty, které byly postupně psány na tabuli, jsou vyjádřeny takto:

a) $14 + y$, $14 + 2y$ a $28 + 3y$, což vede k rovnici $28 + 3y = 94$, jejímž řešením je $y = 22$.
b) $x + 14$, $x + 28$ a $2x + 42$, což vede k rovnici $2x + 42 = 94$, jejímž řešením je $x = 26$.

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za každé řešení; 3 body podle kvality a úplnosti vysvětlení; 1 bod za správně formulovaný závěr.

Z7–II–3

V obdélníku $ABCD$ se stranou AD o délce 5 cm leží bod P tak, že trojúhelník APD je rovnostranný. Polopřímka AP protíná stranu CD v bodě E, úsečka CE měří 5 cm.

Jak dlouhá je úsečka AE a jaká je velikost úhlu AEB? (*L. Hozová*)

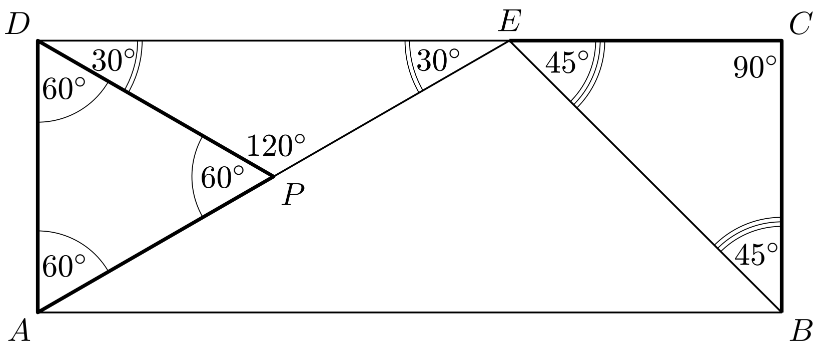
Možné řešení. Trojúhelník APD je rovnostranný, tudíž délky všech jeho stran jsou 5 cm a velikosti všech vnitřních úhlů jsou 60°.

Vnitřní úhly obdélníku $ABCD$ jsou pravé, tudíž velikosti úhlů PDE a PAB jsou 30°. Úhel PED je třetím úhlem trojúhelníku AED (nebo též střídavým úhlem k úhlu EAB), proto je jeho velikost 30°. Úhly PDE a PED jsou shodné, tedy trojúhelník DEP je rovnoramenný a $|PD| = |PE| = 5$ cm. Úsečka AE je dlouhá

$$|AE| = |AP| + |PE| = 5 + 5 = 10\,(\mathrm{cm}).$$

Úsečka CE je shodná s úsečkou CB, tedy trojúhelník EBC je rovnoramenný s pravým úhlem u vrcholu C. Zbylé dva vnitřní úhly jsou proto shodné s velikostí 45°. Velikost úhlu AEB je rovna

$$|\sphericalangle AEB| = 180^\circ - |\sphericalangle AED| - |\sphericalangle BEC| = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$



Návrh hodnocení. Po 1 bodu za poznatky o rovnoramennosti trojúhelníků DPE a EBC; po 1 bodu za vyčíslení velikosti úsečky AE a úhlu AEB; 2 body podle kvality komentáře.