65. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Určete všechny trojice celých kladných čísel k, l a m, pro které platí

$$\frac{3l+1}{3kl+k+3} = \frac{lm+1}{5lm+m+5}.$$

2. Je dána úsečka AB, její střed C a uvnitř úsečky AB bod D. Kružnice $k(C,|BC|)$ a $m(B,|BD|)$ se protínají v bodech E a F. Zdůvodněte, proč je polopřímka FD osou úhlu AFE.

3. Najděte všechna přirozená čísla n, která mají právě šest dělitelů, přičemž součet druhého největšího a druhého nejmenšího z nich je 54.

4. Je dáno přirozené číslo k, $4 \leqq k \leqq 900$. Adam a Bára hrají hru: Adam napíše na tabuli k různých trojmístných čísel, Bára si z nich vybere čtyři různá. Pokud rozdíl mezi dvěma nejmenšími i rozdíl mezi dvěma největšími vybranými čísly je nejvýše 22, vyhrává Bára, jinak vyhrává Adam. V závislosti na hodnotě k určete, kdo má vyhrávající strategii.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 12. dubna 2016

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Nejprve zlomky v zadané rovnici převrátíme (v obou čitatelích jsou kladná čísla) a částečně vydělíme:

$$\begin{aligned}\frac{3kl+k+3}{3l+1} &= \frac{5lm+m+5}{lm+1},\\ \frac{k(3l+1)+3}{3l+1} &= \frac{5(lm+1)+m}{lm+1},\\ k+\frac{3}{3l+1} &= 5+\frac{m}{lm+1}.\end{aligned}$$

Protože pro přirozená čísla l a m platí $3 < 3l+1$ i $m < lm+1$, leží hodnoty obou zlomků z poslední rovnice v intervalu $(0,1)$. Dostáváme tak

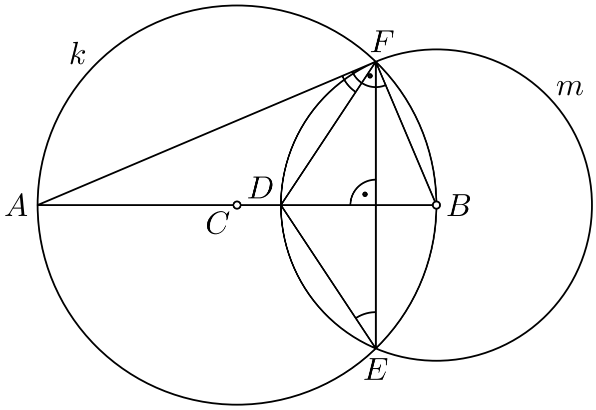
$$k = 5 \quad \text{a zároveň} \quad \frac{3}{3l+1} = \frac{m}{lm+1}. \tag{1}$$

Z druhé rovnice po roznásobení plyne $3lm+3 = 3lm+m$, proto $m = 3$, zatímco l může být libovolné.

Úloze vyhovují všechny trojice $(k,l,m) = (5,l,3)$, kde l je libovolné přirozené číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození $k = 5$ udělte 3 body, za $m = 3$ dva body a další bod udělte za zjištění, že hodnota l může být libovolná. Pokud řešitel uhodne pouze konečný počet řešení (k,l,m), třeba jen jediné řešení $(5,1,3)$, udělte 1 bod, pokud uhodne a ověří řešení $(5,l,3)$ pro libovolné přirozené číslo l, udělte další bod.

2. Kružnice k je Thaletovou kružnicí nad průměrem AB, takže trojúhelník ABF je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu F. Jinými slovy přímka AF je kolmá na poloměr BF kružnice m, a proto se přímka AF dotýká kružnice m v bodě F (obr. 1).



Obr. 1

Z rovnosti úsekového úhlu svíraného tětivou DF s tečnou AF a obvodového úhlu nad touž tětivou máme (jak už je vyznačeno na obrázku)

$$|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle DEF|.$$

Ze souměrnosti úsečky EF podle osy AB tak plyne

$$|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle DFE|,$$

což znamená, že FD je osou úhlu AFE.

Jiné řešení. Označme β velikost úhlu ABF a dopočítejme velikosti úhlů DFE a AFE. Trojúhelník DBF je rovnoramenný, neboť jeho ramena BD a BF jsou poloměry kružnice m, proto

$$|\sphericalangle DFB| = \frac{1}{2}\,(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}.$$

Protože podobně i trojúhelník EBF je rovnoramenný s osou BD, platí

$$|\sphericalangle EFB| = 90° - \beta.$$

Spojením obou předchozích rovností tak dostáváme

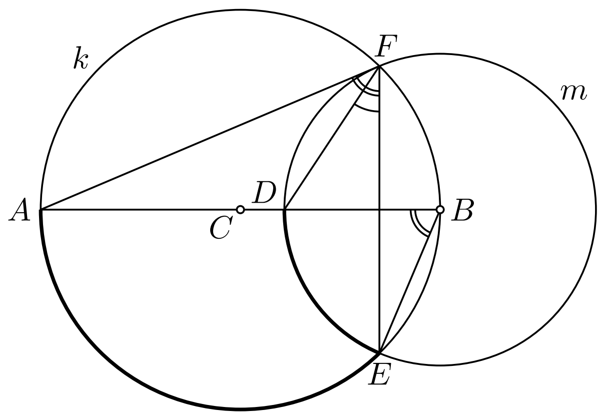
$$|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle DFB| - |\sphericalangle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Thaletovy kružnice k nad průměrem AB víme, že úhel AFB je pravý. Přitom jeho část, totiž úhel EFB, má, jak jsme již zjistili, velikost $90° - \beta$, takže jeho druhá část, úhel AFE, má velikost β, což je přesně dvojnásobek velikosti úhlu DFE. Tím jsme dokázali, že přímka FD je osou úhlu AFE.

Jiné řešení. Nad obloukem AE kružnice k se shodují úhly ABE a AFE (obr. 2). Oblouku DE kružnice m přísluší obvodový úhel DFE a středový úhel DBE. Celkem tak dostáváme

$$|\sphericalangle DFE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DBE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AFE|,$$

což dokazuje, že FD je osou úhlu AFE.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při neúplném řešení se snažte úměrně ocenit užitečnost dokázaných vlastností, např. v prvním postupu dejte 3 body za objevení rovnosti $|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle DEF|$ a zbývající 3 body za využití souměrnosti. Samotné úvahy o symetrii oceňte nejvýše dvěma body. Pokud student učiní zásadní pokrok, ale nesvede vše spojit a dojít k požadovanému závěru, strhněte 1 bod.

3. Nejprve zjistíme, jak vypadají čísla n, která mají právě šest dělitelů.

Pokud je číslo n dělitelné třemi různými prvočísly p, q, r, má alespoň osm různých dělitelů: 1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr. Číslo n může tedy mít nejvýše dva prvočinitele p a q.

Pokud je jeden z prvočinitelů v prvočíselném rozkladu čísla n alespoň ve třetí mocnině, tedy když p^3q dělí číslo n, má opět číslo n alespoň osm dělitelů: 1, p, p^2, p^3, q, pq, p^2q, p^3q.

Zbývá rozebrat čísla dělitelná dvěma prvočísly, každým nejvýše v druhé mocnině.

Číslo $n = pq$ má pouze čtyři dělitele (1, p, q a pq), číslo $n = p^2q^2$ má devět dělitelů (1, p, p^2, q, q^2, pq, p^2q, p^2q^2), jedině číslo tvaru $n = p^2q$ má právě šest dělitelů (1, p, p^2, q, pq, p^2q).

Konečně pokud je číslo n mocninou jediného prvočísla, $n = p^k$, má $k + 1$ dělitelů: $1, p, p^2, \ldots, p^k$. V tomto případě tak vyhovuje pouze $k = 5$.

Zjistili jsme, že číslo n se šesti děliteli má jeden z tvarů p^5 nebo p^2q, kde p a q jsou různá prvočísla. Obě tyto možnosti dále prozkoumáme.

Pokud $n = p^5$, lze dělitele čísla n uspořádat podle velikosti: $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$, tudíž má podle zadání úlohy platit $p + p^4 = p(p^3 + 1) = 54 = 2 \cdot 3^3$. Prvočíslo p je dělitelem čísla 54, proto $p \in \{2, 3\}$. Zároveň i bez počítání vidíme, že je $2(2^3 + 1) < 2 \cdot 3^3 < 3(3^3 + 1)$, takže ani jedno $p \in \{2, 3\}$ požadovanému vztahu nevyhovuje.

Pokud $n = p^2q$, rozlišíme dva případy, $p < q$ a $q < p$.

Je-li $p < q$, je p druhý nejmenší dělitel čísla n (nejmenší je jednotka). Největším dělitelem čísla n je samo číslo p^2q a druhým největším je pq, neboť pq je větší než každý z ostatních čtyř dělitelů 1, p, q i p^2. Hledáme tak řešení rovnice $p + pq = p(1 + q) = 2 \cdot 3^3$. Navíc víme, že q je liché (je větší než prvočíslo p), takže $1 + q$ je sudé, a tudíž musí být $p = 3$. Potom $q = 17$, což vede na řešení $n = 3^2 \cdot 17 = 153$.

Je-li $q < p$, lze dělitele čísla $n = p^2q$ uspořádat podle velikosti: $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Hledáme tak řešení rovnice $q + p^2 = 54$. Protože p i q jsou prvočísla, je $q \geqq 2$, $p \geqq 3$ a také $p^2 \leqq 52$ neboli $p \leqq 7$, proto $p \in \{3, 5, 7\}$. Zároveň však vidíme, že $q = 54 - p^2$ může být prvočíslo menší než p jen pro $p = 7$, pak $q = 5$ a $n = 49 \cdot 5 = 245$, což je další řešení.

Odpověď. Úloha má dvě řešení $153 = 3^2 \cdot 17$ (s děliteli $1 < \mathbf{3} < 9 < 17 < \mathbf{51} < 153$) a $245 = 7^2 \cdot 5$ (s děliteli $1 < \mathbf{5} < 7 < 35 < \mathbf{49} < 245$).

Poznámka. Úvodní rozbor lze podstatně zkrátit, využijeme-li známé tvrzení, že číslo n s rozkladem na prvočinitele $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ má právě

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$$

dělitelů. Číslo 6 se dá takto napsat pouze dvěma způsoby $6 = 2 \cdot 3$, kterým odpovídají buď $m = 1$ a $\alpha_1 = 5$, tedy $n = p^5$, nebo $m = 2$ a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, tedy $n = p^2q$.

Jiné řešení. Nejmenší dělitel čísla n je 1, druhý nejmenší dělitel je nejmenší prvočinitel čísla n — označme jej jako p. Největší dělitel čísla n je samotné číslo n a druhý největší dělitel je n/p. Máme tedy řešit rovnici

$$p + \frac{n}{p} = 54.$$

Protože číslo n má šest dělitelů, musí platit $p < n/p$, takže $p < 54/2 = 27$. Stačí tedy vyzkoušet prvočísla p menší než 27. Pro každé takové prvočíslo dopočítáme $n = p(54 - p)$

a ověříme počet jeho dělitelů:

p	$n = p(54-p)$	dělitelé čísla n	počet dělitelů
2	$104 = 2^3 \cdot 13$	1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104	8
3	$\mathbf{153} = 3^2 \cdot 17$	1, 3, 9, 17, 51, 153	**6**
5	$\mathbf{245} = 5 \cdot 7^2$	1, 5, 7, 35, 49, 245	**6**
7	$329 = 7 \cdot 47$	1, 7, 47, 329	4
11	$473 = 11 \cdot 43$	1, 11, 43, 473	4
13	$533 = 13 \cdot 41$	1, 13, 41, 533	4
17	$629 = 17 \cdot 37$	1, 17, 37, 629	4
19	$665 = 5 \cdot 7 \cdot 19$	1, 5, 7, 19, 35, 95, 133, 665	8
23	$713 = 23 \cdot 31$	1, 23, 31, 713	4

Z tabulky vidíme, že právě šest dělitelů mají pouze čísla 153 a 245.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel postupuje podle prvního řešení, udělte první bod za odvození obou možných prvočíselných rozkladů čísla n, další dva body udělte za vyřešení případu $n = p^5$ a tři body za vyřešení případu $n = p^2q$, z toho 1 bod za rozlišení případů $p < q$ a $p > q$ a sestavení obou rovnic a po 1 bodu za jejich vyřešení. Pokud řešitel postupuje podle druhého řešení, udělte 2 body za odvození rovnice $n + n/p = 54$, za omezení hodnoty p shora dejte další dva body a zbývající dva body udělte za korektní prověření všech přípustných hodnot p.

4. Adamovi k vítězství stačí, aby rozdíl dvou nejmenších čísel, která Bára vybere, byl alespoň 23. Pokud tedy Adam napíše na tabuli některá z čísel

$$a_1 = 100,\ a_2 = 123,\ a_3 = 146,\ \ldots,\ a_{40} = 997\ (= 100 + 39 \cdot 23), \tag{1}$$

Bára určitě prohraje, protože každá dvě čísla z posloupnosti (1) mají rozdíl alespoň 23, neboť jejich rozdíly jsou násobky čísla 23. Vidíme tak, že v případě $k \leqq 40$ stačí Adamovi k vítězství napsat na tabuli libovolných k čísel z posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$.

Ovšem Adamovi k vítězství stačí, aby pouze jeden z rozdílů mezi dvěma nejmenšími a mezi dvěma největšími z vybraných čtyř čísel byl alespoň 23. Ukážeme, že Adam dokáže vyhrát i v případech $k = 41$ a $k = 42$.

Doplňme k číslům $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ z (1) ještě $a_{41} = 998$ a $a_{42} = 999$. I pro $k \in \{41, 42\}$ stačí, když Adam napíše na tabuli čísla $a_1, \ldots, a_k$. Bez ohledu na to, jaká čtyři čísla Bára vybere, budou dvě nejmenší nutně z množiny $\{a_1, a_2, \ldots, a_{40}\}$, jejíž každé dva prvky se liší aspoň o 23, proto vyhraje Adam.

Nyní ukážeme, že pro $k \geqq 43$ může vždy vyhrát Bára bez ohledu na to, která čísla Adam na tabuli napsal. Označme je $a_1, a_2, \ldots, a_k$ od nejmenšího po největší, tedy $100 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq 999$, a podívejme se na rozdíly dvou sousedních čísel $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_2$, $\ldots$, $d_k = a_k - a_{k-1}$. Označme tři nejmenší z nich jako $d_p = a_p - a_{p-1}$, $d_q = a_q - a_{q-1}$ a $d_r = a_r - a_{r-1}$, přičemž $2 \leqq p < q < r \leqq k$ (taková volba nemusí být jednoznačná, to však pro další úvahy nebude důležité). Zřejmě pak platí $p + 1 \leqq q < r$, z čehož $p < r - 1$, takže čísla a_{p-1}, a_p, a_{r-1} a a_r splňují nerovnosti

$$a_{p-1} < a_p < a_{r-1} < a_r,$$

a proto je d_p rozdíl dvou nejmenších a d_r rozdíl dvou největších z nich. Přesvědčme se, že Bára vyhraje, když vybere tato čtyři čísla.

K vítězství Bára potřebuje, aby bylo $d_p \leqq 22$ i $d_r \leqq 22$. Připusťme, že tomu tak není, takže alespoň jedno z čísel d_p, d_q, d_r je nejméně 23 a zbylá dvě jsou alespoň 1.

Jelikož d_p, d_q, d_r jsou tři nejmenší rozdíly, všechny ostatní rozdíly d_i jsou aspoň 23. Pro součet všech rozdílů tak dostáváme odhad

$$\begin{aligned} d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 &= (d_p + d_q + d_r) + \sum_{i \in \{2,\ldots,k\} \setminus \{p,q,r\}} d_i \geqq \\ &\geqq (1 + 1 + 23) + (k-4) \cdot 23 = 2 + 23 \cdot (k-3). \end{aligned} \tag{2}$$

Na druhou stranu všechna čísla a_i jsou trojmístná, a tudíž

$$\begin{aligned} d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 &= (a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) = \\ &= a_k - a_1 \leqq 999 - 100 = 899. \end{aligned}$$

Spojením předchozích dvou nerovností docházíme ke sporu, neboť pro $k \geqq 43$ je

$$922 = 2 + 23 \cdot 40 \leqq 2 + 23 \cdot (k-3) \leqq d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 \leqq 899.$$

Dokázali jsme, že popsaným výběrem čísel a_{p-1}, a_p, a_{r-1} a a_r si Bára zajistí vítězství pro libovolné $k \geqq 43$.

Odpověď. Pro $k \leqq 42$ má vyhrávající strategii Adam a pro $k \geqq 43$ Bára.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel pouze ukáže, že hodnoty $k \leqq 40$, případně $k \leqq 41$ umožňují Adamovi výhru, udělte 1 bod. Dva body udělte v případě, že řešitel uvede správnou hranici $k \leqq 42$ i s uvedením čísel, která má Adam napsat na tabuli (čísla $100, 123, \ldots$ nejsou jedinou možností). Zbývající 4 body udělte za důsledný popis vyhrávající strategie pro Báru v případě $k \geqq 43$; nejtěžší část je dolní odhad součtu rozdílů, proto nerovnost (2) nebo její ekvivalent ohodnoťte 2 body, zbývající popis nejvýše dvěma body.