V. Česko-polsko-slovenské střetnutí juniorů

Fačkovské sedlo, 15. – 18. května 2016

Soutěž jednotlivců

(pondělí, 16. května)

1. V rovině je dána úsečka AB se středem M. Uvažujme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s přeponou AB, v nichž D značí patu výšky z vrcholu C a K, L jsou paty kolmic z bodu D po řadě k odvěsnám BC, AC. Určete, jaký je největší možný obsah čtyřúhelníku $MKCL$.

2. Pro reálná čísla x, y platí $x^2 + y^2 - 1 < xy$. Dokažte, že $x + y - |x - y| < 2$.

3. Určete všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro něž vrcholy pravidelného n-bokého hranolu je možné označit navzájem různými kladnými celými čísly tak, aby vrcholy označené čísly a a b byly spojeny hranou, právě když platí $a \mid b$ nebo $b \mid a$.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC| < |BC|$. Na stranách AC a BC jsou zvoleny po řadě body K a L tak, že $|AB| = |CK| = |CL|$. Osy úseček AK a BL protínají přímku AB po řadě v bodech P a Q. Úsečky KP a LQ se protínají v bodě M. Dokažte, že $|AK| + |KM| = |BL| + |LM|$.

5. Určete nejmenší celé číslo j, pro které lze do jednotlivých polí čtvercové tabulky 10×10 vepsat celá čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sobě jdoucích čísel leželo v některé čtvercové části $j \times j$ celé tabulky.

5th Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match
Fačkovské sedlo, 15 – 18 May 2016

Team Competition

(Tuesday, 17th May)

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí
$$|\angle APB| + |\angle QCR| = 180^\circ.$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Najděte největší možné celé číslo d, které současně dělí tři trojciferná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde a, b a c jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

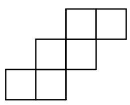
3. Na płaszczyźnie poprowadzono pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszystkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach 11×11 podzielonego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby każda płytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawała poza kwadrat oraz żadne dwie nie pokrywały tego samego pola.

(a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.

(b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek.



Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| : |AC| : |BC| = 5 : 5 : 6$. Označme M stred strany BC a N taký bod na strane BC, že $|BN| = 5 \cdot |CN|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku ABN je stredom úsečky spájajúcej stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC a ABM.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Dané je kladné celé číslo k. Nájdite všetky trojice kladných celých čísel a, b, c, ktoré spĺňajú rovnosti
$$a + b + c = 3k + 1,$$
$$ab + bc + ca = 3k^2 + 2k.$$

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.