

Úterý 12. dubna 2016

Úloha 1. Nechť n je kladné liché číslo a x_1, \dots, x_n jsou nezáporná reálná čísla. Dokažte, že

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} 2x_j x_{j+1},$$

kde $x_{n+1} = x_1$.

Úloha 2. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník a nechť se jeho úhlopříčky AC a BD protínají v bodě X . Nechť C_1, D_1 a M jsou po řadě středy úseček CX, DX a CD . Přímký AD_1 a BC_1 se protínají v bodě Y a přímka MY protíná úhlopříčky AC a BD postupně v bodech E a F . Dokažte, že přímka XY je tečnou kružnice procházející body E, F a X .

Úloha 3. Nechť m je kladné celé číslo. Uvažujme tabulku $4m \times 4m$ složenou z jednotkových čtverečků. Dva různé čtverečky tabulky jsou ve vzájemném vztahu, právě když leží ve stejném řádku nebo stejném sloupci. Žádný čtvereček není ve vztahu sám k sobě. Některé čtverečky tabulky jsou vybarveny modře tak, že každý čtvereček tabulky je ve vzájemném vztahu nejméně se dvěma modrými čtverečky. Určete minimální možný počet modrých čtverečků tabulky.