

Středa 13. dubna 2016

Úloha 4. Dvě kružnice k_1 a k_2 stejného poloměru se protínají v různých bodech X_1 a X_2 . Uvažujme kružnici k , která má s kružnicí k_1 vnější dotyk v bodě T_1 a s kružnicí k_2 vnitřní dotyk v bodě T_2 . Dokažte, že přímky X_1T_1 a X_2T_2 se protínají v bodě ležícím na kružnici k .

Úloha 5. Nechtě k a n jsou přirozená čísla taková, že $k \geq 2$ a $k \leq n \leq 2k - 1$. Pokrývejte pravoúhlými pásky o velikosti $1 \times k$ nebo $k \times 1$ šachovnici $n \times n$ tak, aby každý pásek pokryl právě k polí a žádné pole nebylo pokryto dvěma pásky. Toto pokrývání dělejte do té doby, kdy už nemůžete umístit žádný další pásek. Pro každou dvojici čísel k a n určete nejmenší počet pásek, které takové pokrytí může obsahovat.

Úloha 6. Nechtě S je množina všech kladných celých čísel n takových, že n^4 je dělitelné aspoň jedním z čísel $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$. Dokažte, že množina S obsahuje nekonečně mnoho čísel každého z tvarů $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ a neobsahuje žádný prvek tvaru $7m + 3$ a $7m + 4$, kde m je nezáporné celé číslo.