Česko-polsko-slovenská soutěž 2016
Den 1.

1. Nechť P je n-úhelník, kde $n > 4$. Dokažte, že existují tři jeho různé vrcholy A, B, C s vlastností: Jestliže jsou l_1, l_2, l_3 délky tří lomených čar, na které dělí vrcholy A, B, C obvod mnohoúhelníku P, potom existuje trojúhelník se stranami délek l_1, l_2, l_3.

2. Nechť $m, n > 2$ jsou sudá čísla. Uvažujme tabulku $m \times n$, jejíž každé pole je obarveno buď bíle nebo černě. Hadač obarvení nevidí, ale může pokládat dědovi Vševědovi otázky. Přesněji, může se zeptat na dvě sousedící pole (se společnou stranou) a děd Vševěd prozradí, zda mají, či nemají stejnou barvu. Hadač má za úkol zjistit paritu počtu dvojic sousedících polí s různou barvou. Určete nejmenší možný počet otázek, které hadač potřebuje, aby vždy mohl najít správnou odpověď.

3. Nechť n je kladné celé číslo. Pro konečnou množinu M kadných celých čísel a každé $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ označme s_i počet neprázdných podmnožin M takových, že součet jejich prvků dává při dělení číslem n zbytek i. Množinu M nazveme *n-vyváženou*, právě když $s_0 = s_1 = \cdots = s_{n-1}$. Dokažte, že pro libovolné liché číslo n existuje n-vyvážená podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

   Například pro $n = 5$ a $M = \{1, 3, 4\}$ platí $s_0 = s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = s_4 = 2$, tedy M není 5-vyvážená.

Česko-polsko-slovenská soutěž 2016
Den 2.

4. Určete všechny čtveřice (a, b, c, d) reálných čísel, které řeší soustavu rovnic

$$(a+b)(a^2+b^2) = (c+d)(c^2+d^2),$$
$$(a+c)(a^2+c^2) = (b+d)(b^2+d^2),$$
$$(a+d)(a^2+d^2) = (b+c)(b^2+c^2).$$

5. Dokažte, že pro každé nezáporné celé číslo n existují celá čísla x, y, z taková, že

$$\operatorname{nsd}(x, y, z) = 1 \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 3^{2^n}.$$

6. Uvažujme ostroúhlý trojúhelník ABC, pro který platí $|AB| < |AC|$. Tečna procházející bodem A ke kružnici Ω jemu opsané protíná přímku BC v bodě D. Nechť G je těžiště trojúhelníku ABC a nechť přímka AG protíná kružnici Ω v bodě $H \neq A$. Předpokládejme, že přímka DG protíná přímky AB a AC po řadě v bodech E a F. Dokažte, že $|\sphericalangle EHG| = |\sphericalangle GHF|$.