

# Návody k domácí části I. kola kategorie A

1. Najděte všechna prvočísla  $p$ , pro něž existuje přirozené číslo  $n$  takové, že  $p^n + 1$  je třetí mocninou některého přirozeného čísla.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete všechny trojice  $(a, b, c)$  přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[62-B-I-1]

2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel  $a, b$  takové, že  $ab = a + b$ . [Všechny členy dáme na levou stranu a rozložíme ji na součin:  $(a - 1)(b - 1) = 1$ . Je jen jeden způsob, jak napsat číslo 1 na pravé straně jako součin dvou nezáporných celých čísel, proto  $a = b = 2$ .]
3. Najděte všechna prvočísla  $p$ , pro která existuje přirozené číslo  $x$  takové, že  $p^5 + 4 = x^2$ . [Zřejmě  $x > 2$  a z upravené rovnice  $p^5 = (x - 2)(x + 2)$  s ohledem na  $x + 2 > x - 2 > 0$  plyne, že dvojice  $(x + 2, x - 2)$  je buď  $(p^5, 1)$ ,  $(p^4, p)$ , nebo  $(p^3, p^2)$ . V prvním případě je  $p^5 - 1 = 4$ , ve druhém  $p^4 - p = 4$ , avšak žádná z obou rovnic nemá prvočíselné řešení. Zbývá možnost  $p^3 - p^2 = 4$ , která dává  $p = 2$  a  $x = 6$ .]
- D1. Najděte všechny dvojice prvočísel  $p, q$ , pro které existuje přirozené číslo  $a$  takové, že

$$\frac{pq}{p + q} = \frac{a^2 + 1}{a + 1}.$$

[62-A-I-1]

- D2. Najděte všechny dvojice přirozených čísel  $x, y$  takové, že

$$\frac{xy^2}{x + y}$$

je prvočíslo. [58-A-I-3]

- D3. Dokažte, že pro žádné přirozené číslo  $n$  není číslo  $27^n - n^{27}$  prvočíslem. [Slovenská verze 57-A-III-4, <https://skmo.sk/dokument.php?id=215>]
- D4. Najděte všechna celá čísla  $n$ , pro něž je  $n^4 - 3n^2 + 9$  prvočíslo. [61-A-III-1]

2. Máme  $n^2$  prázdných krabic; každá z nich má čtvercové dno. Výška i šířka každé krabice je přirozené číslo z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Každé dvě krabice se liší alespoň v jednom z těchto dvou rozměrů. Jednu krabici je dovoleno vložit do druhé, má-li oba rozměry menší a alespoň jeden z rozměrů má alespoň o 2 menší. Takto můžeme vytvořit posloupnost krabic vložených navzájem do sebe (tj. první krabice je uvnitř druhé, druhá krabice je uvnitř třetí atd.). Každou takovou sadu uložíme na jinou policičku. Určete nejmenší možný počet policiček potřebný k uskladnění všech  $n^2$  krabic.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dvě pole na šachovnici nazveme sousední, pokud mají společnou stranu. Kolik nejvíce polí lze vybrat na šachovnici  $2n \times 2n$  tak, aby žádné dvě z vybraných polí nebyly sousední? [Polovinu. Celá šachovnice se dá rozdělit na disjunktní dvojice sousedních polí a z každé dvojice můžeme vybrat maximálně jedno pole. Polovina se dá dosáhnout např. výběrem všech polí jedné barvy při klasickém obarvení šachovnice.]
  2. Vyřešte zadaný úkol pro  $n = 4$  a  $n = 5$ . Nestačí uhodnout minimální počet poliček: je třeba jednak ukázat, že je možné krabice na určený počet poliček uložit, jednak zdůvodnit, že menší počet poliček nebude stačit.
  3. Pro  $n \in \{3, 4\}$  najděte co největší sadu krabic takovou, že žádnou z nich nelze vložit do jiné. Zkuste svou sadu zobecnit pro větší  $n$ .
- D1. Výborným doplňujícím materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) je kapitola 3.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce <http://kms.sk/zbierka>.

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  s výškami  $AK, BL, CM$ . Dokažte, že trojúhelník  $ABC$  je rovnoramenný, právě když platí rovnost

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte, že přímky  $AB$  a  $CD$  ležící v jedné rovině jsou na sebe kolmé, právě když platí  $|AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |BD|^2$ . [Stačí dokázat, že pokud  $A, B$  jsou dva různé body v rovině a  $k$  je reálné číslo, je množinou bodů  $X$  takových, že  $|AX|^2 - |BX|^2 = k$ , přímka kolmá na přímku  $AB$ . V důkazu tohoto tvrzení stačí uvažovat patu  $P$  kolmice z bodu  $X$  na přímku  $AB$  a použít Pythagorovu větu v trojúhelnících  $APX$  a  $BPX$ ; dostaneme  $|AX|^2 - |BX|^2 = (|AP|^2 + |PX|^2) - (|BP|^2 + |PX|^2) = |AP|^2 - |BP|^2$ . Pokud je hodnota  $|AX|^2 - |BX|^2$  konstantní, je pata kolmice z  $X$  na  $AB$  vždy stejná pro všechny body  $X$ , leží tedy na přímce kolmé na  $AB$ . Obrácením úvahy hned vidíme, že každý bod této přímky má požadovanou vlastnost.]
  2. Dokažte, že pro libovolný mnohočlen  $P(x)$  a libovolné reálné číslo  $r$  platí následující tvrzení: pokud  $P(r) = 0$ , je mnohočlen  $P(x)$  dělitelný dvojnásobkem  $x - r$ . [Po vydělení  $P(x)$  činitelem  $x - r$  dostaneme podíl  $Q(x)$  a zbytek  $R(x)$ , který má menší stupeň než  $x - r$ , musí to tedy být konstantní mnohočlen. Po dosazení  $x = r$  do rovnosti  $P(x) = (x - r)Q(x) + R(x)$  máme  $R(r) = 0$ , čili zbytek je nulový polynom.]
  3. Rozložte na součin výraz  $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b$ .  $[(a - b)(b - c)(c - a)$ . Považujte daný výraz za mnohočlen v proměnné  $a$  a všimněte si, že  $b$  i  $c$  jsou jeho kořeny. Nebo trochu pracněji:  $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b = bc(c - b) + ca(a - c) + ab(b - a) = bc(c - b) - abc + abc + ca(a - c) + ab(b - a) = bc \times (c - b - a) + ca(b + a - c) + ab(b - a) = c(b + a - c)(a - b) + ab(b - a) = (a - b)(bc - c^2 + ca - ab) = (a - b)(b - c)(c - a)$ .]
- D1. Uvnitř strany  $AB$  libovolného trojúhelníku  $ABC$  leží bod  $D$ . Dokažte, že platí

$$|AB| \cdot |CD|^2 + |AB| \cdot |AD| \cdot |BD| = |BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |BD|.$$

[Tento fakt je znám jako Stewartova věta. Pro trojúhelníky  $ADC$ ,  $BDC$  zapište kosinovou větu s úhly  $ADC$ ,  $BDC$  a využijte k eliminaci jejich kosinů toho, že jsou to dvě navzájem opačná čísla.]

- D2. Dokažte, že pokud pro reálná čísla  $a, b, c$  platí  $a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$ , mají některá dvě z čísel  $a, b, c$  stejné absolutní hodnoty. [ $L - P = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$ ]

4. Najděte všechny funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , které mají pro každé přirozené číslo  $m$  následující vlastnost: pokud označíme  $d_1, d_2, \dots, d_n$  všechny dělitele čísla  $m$ , platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \dots \cdot f(d_n) = m.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Dokažte matematickou indukcí, že každé přirozené číslo větší než 1 se dá rozložit na prvočinitele.
2. Určete hodnoty funkce  $f$ , která splňuje podmínku ze zadání, pro mocniny trojky.
3. Najděte všechny funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , které mají pro každé přirozené číslo  $m$  následující vlastnost: pokud označíme  $d_1, d_2, \dots, d_n$  všechny dělitele čísla  $m$ , platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \dots \cdot f(d_n) = 2^n.$$

[Matematickou indukcí lze dokázat, že  $f(x) = 2$  pro každé přirozené číslo  $x$ . Pokud si označíme dělitele čísla  $m$  vzestupně podle velikosti  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_n = m$ , máme z indukčního předpokladu  $2^{n-1}f(m) = 2^n$  neboli  $f(m) = 2$ .]

- D1. Určete všechny funkce  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  takové, že pro všechna celá čísla  $x, y$  platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006).$$

[56–A–I–6]

- D2. Označme  $\mathbb{N}$  množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takové, že pro libovolná  $x, y \in \mathbb{N}$  platí

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu  $f(2007)$ . [56–A–III–3]

5. Uvnitř základny  $AB$  rovnoramenného trojúhelníku  $ABC$  leží bod  $D$ . Zvolme bod  $E$  tak, aby  $ADEC$  byl rovnoběžník. Na polopřímce opačné k  $ED$  leží bod  $F$  takový, že  $|EB| = |EF|$ . Dokažte, že délka těživy, kterou vytíná přímka  $BE$  v kružnici opsané trojúhelníku  $ABF$ , je dvojnásobkem délky úsečky  $AC$ .

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Pomocí počítání velikostí úhlů dokažte, že výšky v ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  se protínají v jednom bodě. [Označme postupně  $D$  a  $E$  paty výšek z vrcholů  $A$  a  $B$ , dále  $P$  průsečík úseček  $AD$  a  $BE$  a  $X$  průsečík  $CP$  a  $AB$ . Dokážeme, že přímka  $CP$  je kolmá na  $AB$ . Čtyřúhelníky  $ABDE$  a  $CDPE$

jsou tětivové, protože jejich vrcholy leží na Thaletových kružnicích s průměry  $AB$  a  $CP$ . Proto úhly  $BAD$ ,  $BED$ ,  $PCD$  mají všechny stejnou velikost  $90^\circ - |\sphericalangle ABC|$ . Úhel  $CXB$ , který dopočítáme ze známých velikostí zbývajících úhlů v trojúhelníku  $CXB$ , je tedy pravý.]

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  s patami výšek  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , které leží postupně na stranách  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ . Obraz bodu  $F$  v středové souměrnosti podle středu strany  $AB$  leží na přímce  $DE$ . Určete velikost úhlu  $BAC$ . [Slovenská verze 57-A-II-3, <https://skmo.sk/dokument.php?id=214>]
  3. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  takový, že  $|AC| \neq |BC|$ . Uvnitř jeho stran  $BC$  a  $AC$  uvažujme body  $D$  a  $E$ , pro něž je  $ABDE$  tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček  $AD$  a  $BE$  označme  $P$ . Jsou-li přímky  $CP$  a  $AB$  navzájem kolmé, pak  $P$  je průsečíkem výšek trojúhelníku  $ABC$ . Dokažte. [56-A-III-5; Označme  $M$  patu výšky z vrcholu  $C$ ; bod  $P$  leží na úsečce  $CM$ . Uvažujme úsečku  $B'C$ , která je obrazem úsečky  $BC$  v osové souměrnosti s osou  $CM$ . Úhly  $CBP$ ,  $CB'P$  jsou díky symetrii shodné. Body  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  leží podle zadání na kružnici, proto úhly  $CAP$  a  $CBP$  jsou shodné. Z bodů  $A$  a  $B'$  je vidět úsečku  $CP$  pod stejným úhlem, navíc jsou ve stejné polorovině vzhledem k přímce  $CP$ , a tedy  $PCAB'$  je tětivový čtyřúhelník. Proto úhly  $B'AP$ ,  $B'CP$ ,  $BCP$  mají všechny shodnou velikost  $90^\circ - \beta$ . Zbývá dopočítat velikosti úhlů v trojúhelníku  $ADB$  a vidíme, že úhel  $ADB$  je pravý, proto  $P$  je průsečík výšek. Klíčová idea tohoto řešení — využití vhodné osové souměrnosti — je velmi užitečná i v soutěžní úloze.]
  4. Je dán trojúhelník  $ABC$  a uvnitř něho bod  $P$ . Označme  $X$  průsečík přímky  $AP$  se stranou  $BC$  a  $Y$  průsečík přímky  $BP$  se stranou  $AC$ . Dokažte, že čtyřúhelník  $ABXY$  je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu  $C$ ) kružnic opsaných trojúhelníkům  $ACX$  a  $BCY$  leží na přímce  $CP$ . [55-A-II-3]
  5. Uvnitř strany  $BC$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  zvolme bod  $D$  a uvnitř úsečky  $AD$  bod  $P$  tak, aby neležel na těžnici z vrcholu  $C$ . Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku  $CPD$  v bodě, který označíme  $K$  ( $K \neq C$ ). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku  $AKP$  prochází kromě bodu  $A$  dalším pevným bodem, který na výběru bodů  $D$  a  $P$  nezávisí. [58-A-II-4]
- D1. V tětivovém čtyřúhelníku  $ABCD$  označme  $L$ ,  $M$  středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům  $BCA$ ,  $BCD$ . Dále označme  $R$  průsečík kolmic vedených z bodů  $L$  a  $M$  po řadě na přímky  $AC$  a  $BD$ . Dokažte, že trojúhelník  $LMR$  je rovnoramenný. [56-A-III-2]
- D2. V rovině, v níž je dána úsečka  $AB$ , uvažujme trojúhelníky  $XYZ$  takové, že  $X$  je vnitřním bodem úsečky  $AB$ , trojúhelníky  $XBY$  a  $XZA$  jsou podobné ( $\triangle XBY \sim \triangle XZA$ ) a body  $A$ ,  $B$ ,  $Y$ ,  $Z$  leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček  $YZ$ . [63-A-III-2]
- D3. Jsou dány dvě kružnice  $k_1(S_1; r_1)$  a  $k_2(S_2; r_2)$ , přičemž  $|S_1S_2| > r_1 + r_2$ . Uvažujme libovolný trojúhelník  $ABC$  s vrcholem  $A$  na kružnici  $k_1$  a vrcholy  $B$ ,  $C$  na kružnici  $k_2$  zvolenými tak, že obě přímky  $AB$ ,  $AC$  jsou tečnami kružnice  $k_2$ . Najděte
- a) množinu středů kružnic vepsaných,
  - b) množinu průsečíků výšek
- všech takových trojúhelníků  $ABC$ . [57-A-III-2]

Výborným materiálem (vhodným i pro samostatnou přípravu žáků) jsou kapitoly 2.1 a 2.2 ve Sbírce KMS dostupné na stránce <http://kms.sk/zbierka>.

6. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned}k - x^2 &= y, \\k - y^2 &= z, \\k - z^2 &= u, \\k - u^2 &= x\end{aligned}$$

s reálným parametrem  $k$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Určete všechny hodnoty reálného parametru  $p$ , pro které má rovnice  $p(x^2 + x + 4) = 2x$  právě jedno reálné řešení. [Daná kvadratická rovnice má právě jedno reálné řešení tehdy, je-li diskriminant roven nule neboli když  $(p-2)^2 - 16p^2 = 0$ . To nastane pro  $p \in \{-2/3, 2/5\}$ . Pro  $p = 0$  dostaneme lineární rovnici též s jedním řešením.]
2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}ax + y &= 2, \\x - y &= 2a, \\x + y &= 1\end{aligned}$$

o neznámých  $x$  a  $y$  a reálném parametru  $a$ . [58–B–S–1]

3. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1, \\\sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1, \\\sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1.\end{aligned}$$

[60–B–I–1]

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\\sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\\sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

[59–A–I–1]

5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\\sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\\sqrt{z - x^2} &= y - 1.\end{aligned}$$

[59–A–S–1]

6. Určete všechny trojice  $(a, b, c)$  kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$a\sqrt{b} - c = a,$$

$$b\sqrt{c} - a = b,$$

$$c\sqrt{a} - b = c.$$

[59–CPS–1, <https://www.skmo.sk/dokument.php?id=358>]

7. Vyřešte soustavu rovnic  $k + x^2 = y$ ,  $k + y^2 = x$  s reálným parametrem  $k$ . [Rovnice od sebe odečtete, výslednou rovnost upravte na součinnový tvar  $(x - y)(x + y + 1) = 0$  a rozlište, který z činitelů je nulový. Při shrnování výsledků nezapomeňte, že pro některé  $k$  mohou být oba činitelé nuloví.]

- D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = 1,$$

$$x - y = a,$$

$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

o neznámých  $x, y, z$  a reálném parametru  $a$ . [58–B–II–1]

- D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$

$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$

$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

[64–A–III–4]

- D3. Určete všechny trojice  $(x, y, z)$  kladných reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$2x^3 = 2y(x^2 + 1) - 1(z^2 + 1),$$

$$2y^4 = 3z(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1),$$

$$2z^5 = 4x(z^2 + 1) - 3(y^2 + 1).$$

[57–CPS–1, <https://www.skmo.sk/dokument.php?id=79>]