

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti:

- součin dvou krajních číslic je 40,
- součin dvou vnitřních číslic je 18,
- rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic,
- rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla (tj. čísla napsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí) je největší možný.

Určete Moničino myšlené číslo.

(L. Hozová)

Možné řešení. Součin dvou krajních číslic je 40, a to je možné pouze jako $40 = 5 \cdot 8$. Rozdíl těchto číslic je roven $8 - 5 = 3$. Součin dvou vnitřních číslic je 18, a to je možné buď jako $18 = 2 \cdot 9$, nebo jako $18 = 3 \cdot 6$. V prvním případě je rozdíl $9 - 2 = 7$, což je různé od rozdílu krajních číslic. Ve druhém případě je rozdíl $6 - 3 = 3$, což souhlasí s rozdílem krajních číslic. Z prvních tří podmínek tedy vyplývá, že krajní číslice jsou 5 a 8, vnitřní číslice jsou 3 a 6. Taková čísla jsou čtyři:

$$5368, \quad 8635, \quad 8365, \quad 5638. \quad (1)$$

Aby byl rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla největší možný, musí být na místě tisíců, resp. stovek větší ze dvou možných číslic. Monika přemýšlela o čísle 8635.

Návrh hodnocení. 1 bod za dvojici krajních číslic; 1 bod za možné dvojice vnitřních číslic; 2 body za určení správné dvojice vnitřních číslic a čtyř možností (1); 2 body za určení vyhovující možnosti.

Poznámka. Mezi čísly (1) jsou opačně napsána čísla v první dvojici a čísla ve druhé dvojici. Závěrečnou část úlohy lze provést porovnáním čtyř možných rozdílů:

$$\begin{aligned} 8635 - 5368 &= 3267, & 5368 - 8635 &= -3267, \\ 8365 - 5638 &= 2727, & 5638 - 8365 &= -2727. \end{aligned}$$

Z8–II–2

Mat kopal jámu. Pat se ho zeptal, jak bude jáma hluboká. Mat odpověděl hádankou: „Měřím 90 cm a právě mám vykopánu polovinu jámy. Až vykopu jámu celou, bude vršek mojí hlavy pod povrchem země tak hluboko, jak je nyní nad povrchem země.“

Jak hlubokou jámu Mat kopal?

(L. Hozová)

Možné řešení. Z Matova vysvětlení plyne, že jeho výška je přesně mezi hloubkou celé jámy a její polovinou. Tedy 90 cm je rovno třem čtvrtinám hloubky celé jámy. Mat kopal jámu hlubokou $\frac{4}{3} \cdot 90 = 120$ (cm).

Návrh hodnocení. 3 body za poznatek, že 90 cm odpovídá $\frac{3}{4}$ hloubky celé jámy; 3 body za výpočet hloubky jámy.

Jiné řešení. Pokud označíme j hloubku celé jámy, potom podle Matova vysvětlení můžeme vzdálenost vršku Matovy hlavy od povrchu země vyjádřit jako

$$j - 90 = 90 - \frac{1}{2}j. \quad (1)$$

Odtud dostáváme $\frac{3}{2}j = 180$, tedy $j = 120$. Mat kopal jámu hlubokou 120 cm.

Návrh hodnocení. 3 body za vyjádření informací ze zadání pomocí neznámé j ; 3 body za výpočet hloubky jámy.

Poznámka. Pokud označíme v vzdálenost vršku Matovy hlavy od povrchu země a j hloubku celé jámy, potom Matovo vysvětlení můžeme zapsat např. jako

$$90 = \frac{1}{2}j + v, \quad 90 = j - v.$$

Obvyklými úpravami lze z této soustavy získat rovnici ekvivalentní s (1).

Z8–II–3

Pravoúhlý trojúhelník ABC má odvěsny $|AB| = 5$ cm a $|BC| = 12$ cm. Vrcholy trojúhelníku ABC jsou zobrazeny tak, že

- bod A se zobrazuje do bodu A' souměrně podle osy úhlu ABC ,
- bod B se zobrazuje do bodu B' souměrně podle středu úsečky BC ,
- bod C se zobrazuje do bodu C' souměrně podle osy úsečky AB .

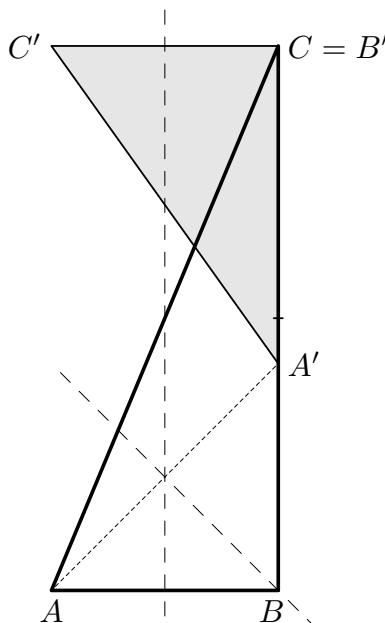
Určete obsah trojúhelníku $A'B'C'$.

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Ramena úhlu ABC jsou souměrná podle jeho osy. Proto bod A' leží na polopřímce BC , a to tak, že $|BA'| = |BA| = 5$ cm.

Koncové body úsečky BC jsou souměrné podle jejího středu, proto $B' = C$.

Body C a C' jsou souměrné podle osy úsečky AB , proto je úsečka CC' kolmá k této přímce. Navíc je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B , proto body A, B, C, C' tvoří vrcholy obdélníku.



Trojúhelník $A'B'C'$ je tedy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B' . Jeho odvěsny mají velikosti

$$|A'B'| = |BB'| - |BA'| = 12 - 5 = 7 \text{ (cm)},$$

$$|B'C'| = |AB| = 5 \text{ (cm)}.$$

Obsah trojúhelníku $A'B'C'$ je $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17,5 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za upřesnění poloh bodů A' , B' , C' ; 2 body za poznatek, že trojúhelník $A'B'C'$ je pravoúhlý; 1 bod za velikosti odvěsen a obsah.