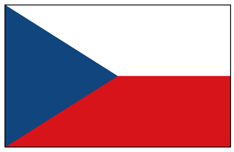

VI. Česko-polsko-slovenské střetnutí juniorů

Szczyrk (Polsko), 15. května 2017 — soutěž jednotlivců

1. Najděte největší celé číslo $n \geq 3$, pro které existuje n-místné číslo $\overline{a_1a_2a_3 \ldots a_n}$ s nenulovými číslicemi a_1, a_2 a a_n, které je dělitelné číslem $\overline{a_2a_3 \ldots a_n}$.

(Jaromír Šimša)

2. Je dán trojúhelník ABC, v němž $|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|$. Uvažujme takové body D a E, že $BCDA$ a $CBEA$ jsou rovnoběžníky. Označme F a G po řadě body na stranách AC a AB, pro něž platí $|AF| = |AG| = |BC|$. Dokažte, že přímky DF a EG se protínají na úsečce BC.

(Patrik Bak)

3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x^2+1)(y^2+1) \geq 2(xy-1)(x+y).$$

Pro která celá čísla x, y nastane v této nerovnosti rovnost?

(Patrik Bak)

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a obvodem 2. Nechť S značí střed kružnice vně připsané straně AB daného trojúhelníku a H značí průsečík výšek trojúhelníku ABS. Určete, jakou nejmenší délku může mít úsečka HS.

(Jerzy Bednarczuk)

5. Do každého pole tabulky $(mn+1) \times (mn+1)$ je vepsáno reálné číslo z uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ tak, že součet všech čísel vepsaných do polí každé podtabulky $n \times n$ je roven n. Určete, jaký je největší možný součet všech čísel v dané tabulce. Svou odpověď zdůvodněte.

(Łukasz Bożyk)

Čas: 3 hodiny 30 minut

VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Szczyrk (Polska), 15 maja 2017 — Zawody indywidualne

1. Znajdź największą liczbę naturalną $n \geqslant 3$, dla której istnieje n-cyfrowa liczba $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$, której cyfry a_1, a_2 i a_n są niezerowe i która jest podzielna przez $\overline{a_2 a_3 \ldots a_n}$.

2. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB + AC = 3 \cdot BC$. Oznaczmy przez D, E takie punkty, że czworokąty $BCDA$ oraz $CBEA$ są równoległobokami, a przez F i G — takie punkty leżące odpowiednio na bokach AC i AB, że $AF = AG = BC$. Udowodnij, że punkt przecięcia prostych DF i EG leży na odcinku BC.

3. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$(x^2+1)(y^2+1) \geqslant 2(xy-1)(x+y).$$

Dla jakich par liczb całkowitych x, y w powyższej nierówności zachodzi równość?

4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o obwodzie 2, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt S jest środkiem okręgu dopisanego do boku AB tego trójkąta, a punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABS. Wyznaczyć najmniejszą możliwą długość odcinka HS.

5. W każde pole tablicy $(mn+1) \times (mn+1)$ wpisano liczbę rzeczywistą z przedziału $[0,1]$ w taki sposób, że suma liczb wpisanych w pola każdego kwadratu $n \times n$ jest równa n. Znajdź największą możliwą sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy.

Czas: 3 godziny 30 minut

VI. ČESKO-POĽSKO-SLOVENSKÉ STRETNUTIE JUNIOROV

SZCZYRK (POĽSKO), 15. MÁJA 2017 — SÚŤAŽ JEDNOTLIVCOV

1. Nájdite najväčšie celé číslo $n \geq 3$, pre ktoré existuje n-ciferné číslo $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ s nenulovými ciframi a_1, a_2 a a_n, ktoré je deliteľné číslom $\overline{a_2a_3\ldots a_n}$.

(Jaromír Šimša)

2. Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB|+|AC|=3\cdot|BC|$. Označme D, E také body, že $BCDA$ a $CBEA$ sú rovnobežníky. Na stranách AC a AB sú postupne zvolené body F a G tak, že $|AF|=|AG|=|BC|$. Dokážte, že priamky DF a EG sa pretínajú na úsečke BC.

(Patrik Bak)

3. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$(x^2+1)(y^2+1) \geq 2(xy-1)(x+y).$$

Pre ktoré celé čísla x, y nastáva rovnosť?

(Patrik Bak)

4. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s obvodom 2, pričom $|\measuredangle ACB| = 90°$. Bod S je stredom kružnice pripísanej k strane AB daného trojuholníka a H je priesečník výšok trojuholníka ABS. Určte najmenšiu možnú dĺžku úsečky HS.

(Jerzy Bednarczuk)

5. V každom políčku tabuľky $(mn+1)\times(mn+1)$ je vpísané reálne číslo z intevalu $\langle 0,1\rangle$. Pritom súčet čísel v každom štvorcovom výseku tabuľky s rozmermi $n\times n$ je rovný n. Určte, aký najväčší môže byť súčet všetkých čísel v tabuľke.

(Łukasz Bożyk)

ČAS: 3 HODINY 30 MINÚT

6TH Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Szczyrk (Poland), 16TH May 2017 — Team Competition

1. Rozhodněte, zda existují prvočísla p, q, r taková, že

$$(p^2+p)(q^2+q)(r^2+r)$$

je druhou mocninou některého celého čísla.

(Kamil Rychlewicz)

2. Rozhodněte, zda existuje konvexní šestiúhelník, jehož všechny strany mají délky větší než 1 a všech devět jeho úhlopříček má délky menší než 2.

(Vojtech Bálint)

3. Ile jest 8-cyfrowych liczb postaci $*2*0*1*7$, które są podzielne przez 7, gdzie cztery nieznane cyfry zastąpiono gwiazdkami?

(Peter Novotný)

4. Bolek narysował na tablicy trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym $AB > CD$, a w nim jego linię środkową EF. Punkt przecięcia jego przekątnych AC, BD oznaczył przez P, a jego rzut prostokątny na prostą AB oznaczył przez Q. Lolek, chcąc dokuczyć Bolkowi, zmazał z tablicy wszystko oprócz odcinków EF i PQ. Gdy Bolek to zobaczył, chciał uzupełnić rysunek i dorysować wyjściowy trapez, ale nie wiedział jak to zrobić. Czy umiesz pomóc Bolkowi?

(Libuše Hozová & Jaroslav Švrček)

5. Do každého políčka štvorcovej tabuľky 100×100 vpíšeme číslo 1, 2 alebo 3. Uvažujme všetky podtabuľky $m \times n$, pričom $m \geq 2$ a $n \geq 2$. Podtabuľku nazveme *vyrovnaná*, ak má vo svojich rohových políčkach štyri rovnaké čísla. Pre čo najväčšie číslo k dokážte, že vždy môžeme nájsť k vyrovnaných podtabuliek, z ktorých žiadne dve sa neprekrývajú, t. j. nemajú spoločné políčko.

(Jaromír Šimša)

6. Na tabuli je napísaných 100 navzájom rôznych kladných reálnych čísel, pričom pre ľubovoľné tri rôzne čísla a, b, c je číslo a^2+bc celé. Dokážte, že pre ľubovoľné dve čísla x, y z tabule je číslo $\frac{x}{y}$ racionálne.

(Dominik Burek)

Time: 5 hours