

**ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
67. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2017/2018)**

Kategorie A

1. Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $O - X$, kde O je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více koleček než křížků a X je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více křížků než koleček.
- a) Dokažte, že pro tabulku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.
b) Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n + 1) \times (2n + 1)$ v závislosti na n . (*Josef Tkadlec*)

2. Dokažte, že pokud je součet dvou daných reálných čísel a, b větší než 2, má soustava nerovnic

$$(a - 1)x + b < x^2 < ax + (b - 1)$$

nekonečně mnoho řešení x v oboru reálných čísel.

(*Jaromír Šimša*)

3. V rovině jsou dány dvě shodné kružnice o poloměru 1, které mají vnější dotyk. Uvažujme pravoúhelník obsahující obě kružnice, jehož každá strana se dotýká aspoň jedné z nich. Určete největší a nejmenší možný obsah takového pravoúhelníku. (*Jaroslav Švrček*)

4. Najděte největší přirozené číslo n takové, že hodnota součtu

$$\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než x .

(*Patrik Bak*)

5. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A . Dokažte, že úhel OAC je pravý. (*Patrik Bak*)

6. Najděte největší možný počet prvků množiny M celých čísel, která má následující vlastnost: Z každé trojice různých čísel z M lze vybrat některá dvě, jejichž součet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. (*Ján Mazák*)

Kategorie B

1. Najděte všechny mnohočleny tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d$, které při dělení dvojkčlenem $2x^2 + 1$ dávají zbytek $x + 2$ a při dělení dvojkčlenem $x^2 + 2$ dávají zbytek $2x + 1$.
(Pavel Calábek)

2. Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí nerovnosti

$$0 \leq \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \leq |t - 1|.$$

(Tomáš Jurík)

3. Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD , který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD . Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A , mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.
(Jaroslav Švrček)

4. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c , pro která platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(Patrik Bak)

5. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obě přímky, z nichž každá dělí daný lichoběžník na dvě části stejného obsahu a je přitom rovnoběžná s jeho úhlopříčkou AC , resp. BD . Dokažte, že průsečík těchto dvou přímek leží na úsečce, která spojuje středy obou základů AB a CD .
(Jaromír Šimša)

6. Najděte největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ tak, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, která se liší o 2 nebo o 5.
(Pavel Calábek)

Kategorie C

1. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo \overline{abcd} takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. (*Patrik Bak, Mária Dományová*)

2. Určete největší možný počet neprázdných po dvou disjunktních množin se stejnými součty prvků, na které lze rozdělit množinu
 - a) $\{1, 2, \dots, 2017\}$,
 - b) $\{1, 2, \dots, 2018\}$.Je-li množina tvořena jedním číslem, považujeme ho za součet jejích prvků. (*Patrik Bak*)

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , v němž D značí patu výšky z vrcholu C . V polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C uvažujeme body E, F takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na úsečce CD . (*Jaroslav Švrček*)

4. Určete největší celé číslo n , při kterém lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 3×3 byla zapsána aspoň jedna druhá mocnina celého čísla. (*Jaromír Šimša*)

5. Je dána kružnice $k(O, r)$ a bod A , kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C . Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice. Vyjádřete její poloměr ρ pomocí daných délek d a r . (*Šárka Gergelitsová*)

6. Na kruhovém opevnění hradu je několik věží. Do nich se rozmístí pět černých a pět rudých rytířů (v každé věži jich může být více i různých barev) a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny přejdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Dokažte následující tvrzení:
 - a) Je-li věží osm, mohou se rytíři na počátku rozmístit tak, že během každé hodiny bude v každé věži aspoň jeden rytíř.
 - b) Je-li věží sedm, některou hodinu zůstane aspoň jedna věž neobsazená, ať se na počátku rytíři rozmístí jakkoliv. (*Pavel Calábek*)