C47, školní kolo

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$[3x-5]=5x-8,$$

kde $[a]$ je celá část reálného čísla a, tj. celé číslo, pro které platí $[a]\le a<[a]+1$. Například $[3{,}7]=3$ a $[-3{,}7]=-4$.

Řešení 1. Číslo $k=5x-8$ je nutně celé. Odtud $x=\frac15(k+8)$ a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\left[\frac{k+8}{5}\right]=k\,.$$

To podle definice celé části vede k nerovnostem

$$k\le\frac{k+8}{5}<k+1,$$

po úpravě $-3<k\le-\frac12$. Číslo k je však celé, platí tedy buď $k=-2$ (pak $x=1{,}2$), nebo $k=-1$ (pak $x=1{,}4$).

Daná rovnice má právě dvě řešení $x=1{,}2$ a $x=1{,}4$. (Zkouška dosazením se provede snadno, při našem postupu však není nutná.)

Řešení 2. Podle definice celé části musí platit $5x-8\le3x-5<(5x-8)+1$, po úpravě $1<x\le\frac32$. Z tohoto intervalu nyní vybereme ta x, pro která je hodnota $5x-8$ celočíselná: je-li $1<x\le\frac32$, pak $5<5x\le\frac{15}{2}$, takže $-3<5x-8\le-\frac12$, tedy $5x-8=-2$ nebo $5x-8=-1$. Odtud vypočteme obě řešení $x=1{,}2$ a $x=1{,}4$. Ani při tomto postupu není zkouška nezbytná.

Řešení 3. Označme $k=[3x-5]$, takže $3x-5=k+\varepsilon$, kde $0\le\varepsilon<1$ a číslo k je celé. Vyjádříme odtud x a dosadíme do rovnice $k=5x-8$, kterou pak vyřešíme vzhledem k ε:

$$x=\tfrac13(k+\varepsilon+5),\qquad k=\tfrac53(k+\varepsilon+5)-8,\qquad \varepsilon=-\tfrac15(2k+1).$$

Hledáme tedy ta celá čísla k, pro která platí $0\le-\frac15(2k+1)<1$. To je ekvivalentní s nerovnostmi $-3<k\le-\frac12$, takže buď $k=-2$ (pak $\varepsilon=0{,}6$ a $x=1{,}2$), nebo $k=-1$ (pak $\varepsilon=0{,}2$ a $x=1{,}4$). Zkouška opět není nutná.

Naznačme ještě čtvrtý možný postup řešení. Z dané rovnice plyne, že číslo $5x$ je celé, takže necelá část čísla x je rovna jednomu z čísel 0, 0,2, 0,4, 0,6 nebo 0,8. Dále je možné odděleně posuzovat těchto pět možností. Tak např. pro $x=k+0{,}4$, kde k je celé, vychází $5x-8=5k-6$, $3x-5=3k-3{,}8$, takže $[3x-5]=3k-4$; rovnice $5k-6=3k-4$ má (celočíselné) řešení $k=1$, kterému odpovídá $x=1{,}4$.

2. Zjistěte nejmenší trojciferné číslo, které je dělitelné právě polovinou z čísel

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 27,\ 36.$$

Řešení 1. Hledané číslo A má být dělitelné právě šesti z vypsaných čísel. Každé z těchto 12 čísel je dělitelné pouze prvočísly 2 a 3. Jelikož mezi těmito čísly jsou

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX jen čtyři mocniny dvou (2, 4, 8, 16) a jen tři mocniny tří (3, 9, 27), musí být číslo A dělitelné jak dvěma, tak třemi (a tedy i šesti).

Protože kromě čísel 2, 3 a 6 má číslo A ještě další tři dělitele mezi vypsanými čísly, musí být A dělitelné čtyřmi nebo devíti, ne však oběma čísly zároveň (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36). Rozlišme proto dva případy.

• $4 \mid A$ a $9 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 4, 6 a 12, šestý vypsaný dělitel je nutně (jediné) z čísel 8, 16, 24. Proto $8 \mid A$, takže také (ve sporu s předchozí větou) $24 \mid A$. Musí tedy nastat druhý případ.

• $9 \mid A$ a $4 \nmid A$. Pak je číslo A dělitelné 2, 3, 6, 9 a 18, šestý vysraný dělitel je nutně číslo 27. Proto $54 \mid A$, tedy $A = 54\ell$, kde ℓ je liché číslo (neboť $4 \nmid A$). Na druhé straně, *každé* takové číslo 54ℓ má zřejmě mezi vypsanými čísly právě 6 dělitelů (2, 3, 6, 9, 18, 27). Takové nejmenší trojciferné číslo je $54 \cdot 3 = 162$.

Řešení 2. Hledané trojciferné číslo A nemůže být dělitelné ani číslem 36 (pak by mělo osm dělitelů 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), ani číslem 24 (pak by mělo sedm dělitelů 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Probírejme zbylých 10 vypsaných čísel (sestupně od největšího) a zjišťujme, zda mohou dělit číslo A.

• $27 \mid A$. Protože číslo A je nutně sudé (jinak by mělo jen dělitele 3, 9, 27), platí $54 \mid A$. Číslo $54 \cdot 2 = 108$ podmínce úlohy nevyhovuje, zato číslo $3 \cdot 54 = 162$ ano. Dále už předpokládejme, že $27 \nmid A$.

• $18 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 6, 9 a 18. Šestý vypsaný dělitel je (jediné) z čísel 4, 8, 12, 16. Proto $4 \mid A$, takže také $12 \mid A$, což je spor s předchozí větou.

• $16 \mid A$. Číslo A má čtyři dělitele 2, 4, 8 a 16, poslední dva vypsaní dělitelé musí být z čísel 3, 6, 9, 12. Proto $3 \mid A$, takže také $24 \mid A$, a to jsme úvodem vyloučili.

• $12 \mid A$. Číslo A má pět dělitelů 2, 3, 4, 6 a 12, šestým vypsaným dělitelem musí být číslo 8 nebo číslo 9. Z $8 \mid A$ pak ale plyne $24 \mid A$ (spor), z $9 \mid A$ zase $18 \mid A$, a tím jsme se už zabývali.

Kdyby číslo A nebylo dělitelné žádným z čísel 36, 24, 27, 18, 16 a 12, muselo by být dělitelné všemi šesti čísly 2, 3, 4, 6, 8 a 9, a tedy přece jen i číslem 18. Tím je naše diskuse uzavřena. Hledané číslo je 162.

Řešení 3. Stejně jako v prvním řešení vysvětlíme, že hledané číslo je dělitelné šesti. Budeme proto postupně probírat trojciferná čísla dělitelná šesti (od nejmenšího z nich, čísla 102), dokud nenajdeme takové, které má mezi vypsanými čísly právě šest dělitelů (počet těchto dělitelů dále uvádíme vždy v závorce za číslem): 102 (3), 108 (8), 114 (3), 120 (7), 126 (5), 132 (5), 138 (3), 144 (8), 150 (3), 156 (5), 162 (6). Hledané číslo je 162.

3. Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme P střed jeho výšky z vrcholu C, M průsečík přímky AP s odvěsnou BC a N průsečík přímky BP s odvěsnou AC. Dokažte, že pravoúhelník $KLMN$, jehož strana KL leží na přeponě AB, je čtverec.

Řešení 1. Nechť D je střed přepony AB a nechť $c = |AB|$. Ze souměrnosti podle osy CD plyne $MN \parallel AB$, tudíž pravoúhelník $KLMN$ existuje. Naší úlohou je dokázat, že $|KL| = |LM|$.

Protože bod P je střed odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ACD, platí rovnosti $|DP| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{4}c$. Všimněme si nyní navzájem podobných pravoúhlých trojúhelníků ALM a ADP. Pro délky jejich odvěsen platí

$|AL| : |LM| = |AD| : |DP| = (\frac{1}{2}c) : (\frac{1}{4}c) = 2$, odkud $|AL| = 2|LM|$. Jelikož $|AL| = |AB| - |BL| = c - |BL| = c - |LM|$ (neboť BLM je rovnoramenný trojúhelník), dostáváme rovnici $c - |LM| = 2|LM|$, podle níž $|LM| = \frac{1}{3}c$. Platí tedy $|BL| = \frac{1}{3}c$, analogicky se dokáže rovnost $|AK| = \frac{1}{3}c$ (která plyne též ze souměrnosti podle osy CD). Pak ale $|KL| = |AB| - |AK| - |BL| = c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c$. Rovnost $|KL| = |LM|$ je tak dokázána.

Řešení 2. Protože $MN \parallel AB$, pravoúhelník $KLMN$ existuje. Vzhledem k rovnostem $|AK| = |KN| = |LM| = |BL|$ je pravoúhelník $KLMN$ čtverec, právě když jeho vrcholy K a L dělí přeponu AB na tři shodné úsečky, tedy právě když $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$.

Postup ze zadání úlohy trochu obraťme: do trojúhelníku ABC nejprve vepišme výše určeným způsobem čtverec $KLMN$ a vysvětleme, proč se pak úsečky AM a CN protínají v takovém bodě P, který je středem výšky CD trojúhelníku ABC. Z osové souměrnosti podle osy CD je předně jasné, že tento průsečík P na výšce CD skutečně leží. Pro odvěsny pravoúhlého trojúhelníku ALM platí $|ML| = \frac{1}{3}|AB|$ a $|AL| = \frac{2}{3}|AB|$, takže $|AL| = 2|ML|$; proto i pro odvěsny podobného trojúhelníku ADP platí $|AD| = 2|PD|$, což spolu s rovností $|AD| = |CD|$ již vede k závěru, že $|PD| = |PC|$. Průsečík P úseček AM a CN je tedy skutečně středem výšky CD.

Řešení 3. Označme D patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a trojúhelník CDB doplňme na čtverec $CDBE$ se středem S. Z rovnoběžníku $ADEC$ usoudíme, že body A, P, M a E leží na jedné přímce. Bod M je navíc těžištěm trojúhelníku CDE, takže platí $|MC| = \frac{2}{3}|CS| = \frac{1}{3}|BC|$. Z rovnosti $|MC| = \frac{1}{3}|BC|$ a rovnoběžnosti úseček MN a AB vyplývá, že trojúhelníky ABC a NMC jsou podobné s koeficientem $\frac{1}{3}$. Odtud plyne $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$, takže pravoúhelník $KLMN$ existuje a je to čtverec (viz úvod druhého řešení).