Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

spolu s Vámi prožívám slavnostní atmosféru těchto chvil. Doufám, že ji příliš nenaruším svým pracovně zaměřeným vystoupením, ve kterém, jak jinak, vyřeším jednu úlohu. Snad se nebude nudit nikdo z přítomných, když úloha bude mít takovéto zadání.

Matematik M. zvolil dvě nesoudělná pětimístná čísla m, n a na své kalkulačce zadal podíl $m : n$. Na jejím desetimístném displeji se objevilo:

0.9032008

Určete čísla m a n, která M. zvolil.

Oprávněně můžete zapochybovat, zda má smysl se takovou kuriózní hádankou, která zřejmě nemá žádný praktický význam, vůbec zabývat. Vzdělanější skeptici mohou namítnout, že ani z matematického hlediska není popsaná situace nijak zajímavá. Běžný počítač s vhodně napsaným programem totiž hledaná pětimístná čísla odhalí ve zlomku vteřiny (na obyčejné kalkulačce by podobné testování trvalo nejspíše několik hodin, možná i dnů). Na takovou výhradu odpovím protiotázkou: proč i k současným disciplínám sportovní olympiády patří tolik oblíbené běžecké disciplíny a cyklistika, když máme motorky, auta nebo dokonce letadla? Berme proto postavenou úlohu jako ušlechtilou výzvu našemu intelektu a pokusme se ji vyřešit bez užití počítačových programů.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Úloha je snad zadána správně česky (slovo *display* může být mužského i ženského rodu), podívejme se na její obsah. Nikoho z přítomných snad neudiví, že je možné mezi sebou dělit i čísla, která jsou nesoudělná. Naopak mnozí si asi povšimnuli, že výsledek dělení se na kalkulačce zobrazil jako dnešní datum. Nejde o náhodu, M. se totiž s kalkulačkou chystal na dnešní cestu do Českých Budějovic a jsem rád, že je tady přítomen.

Méně nápadnou okolností, kterou M. v první chvíli ani nezpozoroval, je skutečnost, že na desetimístném displeji se objevil pouze osmimístný výsledek. Musím na M. prozradit, že v používání kalkulačky není velký odborník. Přestože například ví, že kalkulačka má jednoduchou paměť, nedovede M. do ní žádné mezivýsledky uložit, natož je později vyvolat; paměť na kalkulačce mu zkrátka neslouží. Teprve při posuzované úloze se M. ujistil, že displej kalkulačky má 10 míst a že tudíž v zobrazeném výsledku došlo k záhadnému výpadku dvou číslic.

Nejednalo by se samozřejmě o žádnou záhadu, kdyby byl zobrazený výsledek přesnou hodnotou zadaného podílu. V tom případě by ovšem platily přesné rovnosti

$$\frac{m}{n} = 0{,}9032008 = \frac{9\,032\,008}{10^7} = \frac{2^3 \cdot 23 \cdot 191 \cdot 257}{2^7 \cdot 5^7} = \\ = \frac{23 \cdot 191 \cdot 257}{2^4 \cdot 5^7} = \frac{1\,129\,001}{1\,250\,000}.$$

Poslední zlomek zapsaný sedmimístnými čísly je však v základním tvaru, takže se nemůže přesně rovnat podílu dvou pětimístných čísel. Z tohoto rozporu plyne závěr, že zobrazená hodnota byla pouze přibližná a že přesná hodnota má desetinný zápis

$$\frac{m}{n} = 0{,}903200800\ldots\ldots$$

Zdánlivá záhada je tak vyřešena: poslední dvě vypsané nuly se na kalkulačce – patrně z úsporných důvodů – nezobrazily! Dodejme, že nad danou úlohou M. zjistil i další podrobnosti o své kalkulačce – že totiž pracuje při interních výpočtech s přesnějšími hodnotami, než které na displeji zobrazuje a že tyto hodnoty nejsou při zobrazování zaokrouhlovány, nýbrž jejich dekadické zápisy jsou na desátém platném místě prostě „useknuty“, což nám pro přesnost praktických výpočtů bohatě stačí.

Vraťme se však k samotné úloze, kterou máme řešit. Abyste lépe pochopili postup, kterým se k oběma neznámým pětimístným číslům dobereme, vyřeším nejprve méně pracný úkol téhož druhu: najdeme dvojmístná čísla m, n s poměrem $m : n$ daným kalkulačkou v podobě desetinného čísla

2.24137931

Nejprve v zadaném čísle vyčleníme celou část, abychom vyjádřili, kolikrát je menší jmenovatel n ve větším čitateli m obsažen:

$$\frac{m}{n} = 2{,}24137931 = 2 + 0{,}24137931$$

(Od tohoto místa jsou rovnítka znaky přibližných rovností na kalkulačce.) Hledejme zlomek rovný zbylému desetinnému číslu menšímu než 1. Tento zlomek bude mít čitatel menší než jmenovatel. Zjistíme proto tentokrát, kolikrát je čitatel obsažen ve jmenovateli. Dosáhneme toho tím, že vypočteme převrácenou hodnotu daného čísla a pak v něm opět vyčleníme celou část:

$$\frac{1}{0{,}24137931} = 4{,}142857143 = 4 + 0{,}142857143.$$

Pro zbylé desetinné číslo menší než 1 postup zopakujeme ještě jednou:

$$\frac{1}{0{,}142857143} = 7 \quad \text{(hurá!)}$$

Máme vyhráno, zbývá zapsat celý výpočet jedním výrazem a určit jeho hodnotu:

$$\frac{m}{n} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = \frac{65}{29}.$$

Hledaná čísla jsou tedy $m = 65$ a $n = 29$.

Nyní již víme, co nás čeká při řešení původní úlohy, netušíme jen, po kolika krocích celý výpočet skončí:

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= 0{,}9032008 \\
\frac{1}{0{,}9032008} &= 1{,}10717351 && = 1 + 0{,}10717351 \\
\frac{1}{0{,}10717351} &= 9{,}330663911 && = 9 + 0{,}330663911 \\
\frac{1}{0{,}330663911} &= 3{,}02421875 && = 3 + 0{,}02421875 \\
\frac{1}{0{,}02421875} &= 41{,}29032258 && = 41 + 0{,}29032258 \\
\frac{1}{0{,}29032258} &= 3{,}444444444 && = 3 + 0{,}444444444 \\
\frac{1}{0{,}444444444} &= 2{,}25 && = 2 + 0{,}25 \\
\frac{1}{0{,}25} &= 4
\end{aligned}
$$

Výsledkem je, nelekněte se prosím, obrovitý zlomek

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{41 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}}}$$

kterému v matematice říkáme *řetězový* a který stručněji zapisujeme takto:

$$\frac{m}{n} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4].$$

Jeho hodnotu určíme postupným výpočtem „odspodu nahoru“:

$$2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4} \quad\rightarrow\quad 3+\frac{4}{9}=\frac{31}{9} \quad\rightarrow\quad 41+\frac{9}{31}=\frac{1\,280}{31} \quad\rightarrow$$

$$3+\frac{31}{1\,280}=\frac{3\,871}{1\,280} \rightarrow 9+\frac{1\,280}{3\,871}=\frac{36\,119}{3\,871} \rightarrow 1+\frac{3\,871}{36\,119}=\frac{39\,990}{36\,119} \rightarrow$$

$$\frac{m}{n}=\frac{36\,119}{39\,990}$$

Pomocí výpočtů několika převrácených čísel na kalkulačce jsme tedy poměrně rychle zjistili, že matematik M. mohl dělit číslo 36 119 číslem 39 990, na počítači s přesnější aritmetikou vyjde hodnota jejich podílu jako číslo se zápisem

$$\frac{36\,119}{39\,990}=\underline{0{,}9032008}00200050\ldots,$$

přitom podtržením vyznačujeme číslice zobrazené na kalkulačce.

Přítomní mladí soutěžící jistě cítí, že podané řešení úlohy není úplné. Měli bychom ještě zdůvodnit, že nalezená čísla jsou jediná, která mohl M. zvolit, že tedy žádná jiná pětimístná čísla m a n nemají podíl zapsaný na kalkulačce dnešním datem. Museli bychom toho vědět o řetězových zlomích více, abychom našli další zlomky s hodnotami blízkými danému podílu, pět nejbližších podílů pětimístných čísel vám teď od nejmenšího po největší vypíši:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_1}{n_1} &= \frac{44\,274}{49\,019} = \underline{0{,}903200799}689916\ldots\\
\frac{m_2}{n_2} &= \frac{80\,393}{89\,009} = \underline{0{,}903200799}919109\ldots\\
\frac{m_3}{n_3} &= \frac{36\,119}{39\,990} = \underline{0{,}903200800}200050\ldots\\
\frac{m_4}{n_4} &= \frac{64\,083}{70\,951} = \underline{0{,}903200800}552493\ldots\\
\frac{m_5}{n_5} &= \frac{27\,964}{30\,961} = \underline{0{,}903200801}007719\ldots
\end{aligned}
$$

Vidíte, že posuzovaná úloha má dvě řešení, zapsaná jako třetí a čtvrtý zlomek. M. tedy určitě počítal jeden ze dvou podílů

$$36\,119 : 39\,990 \quad \text{nebo} \quad 64\,083 : 70\,951\,.$$

Na závěr bych chtěl alespoň trochu poodhalit krásu konstrukce uvedených řetězových zlomků

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{44\,274}{49\,019} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 5]$$

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{80\,393}{89\,009} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4, 2]$$

$$\frac{m_3}{n_3} = \frac{36\,119}{39\,990} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 4]$$

$$\frac{m_4}{n_4} = \frac{64\,083}{70\,951} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 3, 2]$$

$$\frac{m_5}{n_5} = \frac{27\,964}{30\,961} = [0, 1, 9, 3, 41, 3, 2, 3]$$

Všimněte si například, jak jednoduše lze druhý zlomek sestavit z prvního a třetího zlomku:

$$80\,393 = 44\,274 + 36\,119,$$
$$89\,009 = 49\,019 + 39\,990.$$

Obecně pro naše zlomky platí

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{m_{i-1} + m_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}}.$$

Další pozoruhodné rovnosti mezi dvojicemi sousedních zlomků je už obtížnější numericky ověřit, proto rovnou vypíšu jejich obecné vyjádření

$$m_i \cdot n_{i-1} - m_{i-1} \cdot n_i = 1.$$

Tím naše krátká exkurze do říše řetězových zlomků končí. Vrátím se k soutěži, která nás všechny dnes do Českých Budějovic přivedla a popřeji vám účastníkům jménem pracovníků Ústřední komise MO hodně zdaru při řešení pondělních i úterních úloh. V zadání jedné z nich najdete sice ne datum, avšak alespoň aktuální letopočet. Jsme zvědavi, jak si s ní i s ostatními pěti úlohami bez kalkulačky a počítače poradíte, těšíme se na vaše řešení. Prohlašuji ústřední kolo 57. ročníku Matematické olympiády za zahájené.