# 58. ročník matematické olympiády
# III. kolo kategorie A

Plzeň, 22.–25. března 2009

**1.** *Jsou-li všechna čísla $p$, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je číslo $6p+11$ složené. Dokažte.* *(Pavel Novotný)*

**Řešení.** Předpokládejme, že všechna čísla $p$, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ jsou prvočísla. Zkoumejme, jaký zbytek po dělení pěti může dávat prvočíslo $p$, tj. pro jaká $l$ z množiny $\{0,1,2,3,4\}$ a nezáporné celé číslo $k$ může platit $p=5k+l$.

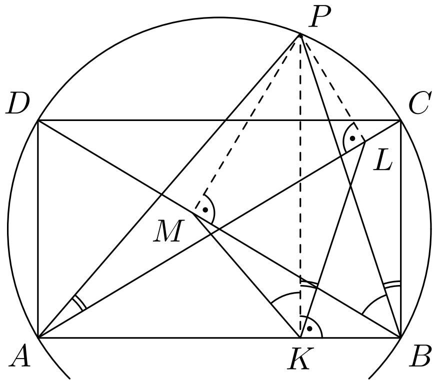
- ▷ Je-li $p=5k$ prvočíslo, pak $p=5$, tehdy ovšem $11p+10=65$ není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p=5k+1$, pak $3p+2=5(3k+1)$ je prvočíslem jedině pro $k=0$, tehdy ovšem platí $p=1$, což není prvočíslo.
- ▷ Je-li $p=5k+2$, pak $7p+6=5(7k+4)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.
- ▷ Je-li $p=5k+3$, pak $9p+8=5(9k+7)$ není prvočíslem pro žádné celé $k \geqq 0$.

Prvočíslo $p$ tedy musí být tvaru $5k+4$. Pak ovšem $6p+11=5(6k+7)$ je složené číslo pro každé celé $k \geqq 0$.

*Poznámka.* Nejmenší prvočíslo $p$, pro něž jsou i všechna čísla $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, je $p=2\,099$.

**2.** *Na kratším z oblouků $CD$ kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod $P$. Paty kolmic z bodu $P$ na přímky $AB$, $AC$ a $BD$ označme postupně $K$, $L$ a $M$. Ukažte, že úhel $LKM$ má velikost $45°$, právě když $ABCD$ je čtverec.* *(Tomáš Jurík)*

**Řešení.** Ukážeme, že úhel $LKM$ má stejnou velikost jako úhel $CBD$ (obr. 1). Odtud dané tvrzení triviálně plyne (úhel $CBD$ má velikost $45°$, právě když $|BC|=|CD|$, tj. když $ABCD$ je čtverec).




Obr. 1

Body $B, K, M, P$ leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem $BP$. Pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou $PM$ tedy platí $|\sphericalangle PKM|=|\sphericalangle PBM|$. Podobně body $A$, $K$, $L$, $P$ leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem $AP$ a pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou $PL$ máme $|\sphericalangle LKP|=|\sphericalangle LAP|$. Z obvodových úhlů nad tětivou $CP$ kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ tak dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplývá

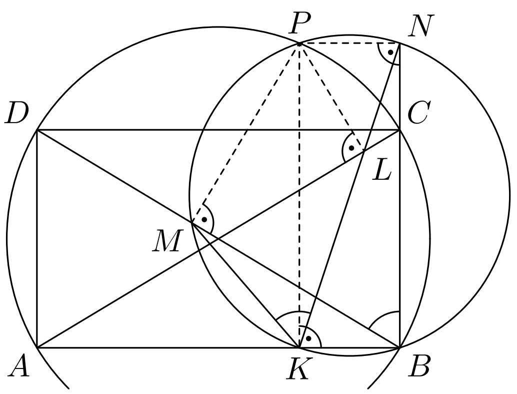
$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| = |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|,$$

což jsme chtěli dokázat.

*Poznámka.* Uvedený postup se dá použít i v triviálním případě, kdy $P=C$ anebo $P=D$; tehdy mají některé z uvažovaných úhlů nulovou velikost.

**Jiné řešení.** Opět dokážeme, že úhly $LKM$ a $CBD$ mají stejnou velikost. Označme $N$ patu kolmice z bodu $P$ na přímku $BC$. Body $K$, $L$, $N$ leží na Simsonově přímce příslušející bodu $P$ a trojúhelníku $ABC$ (obr. 2). Na Thaletově kružnici nad průměrem $PB$ leží body $K$, $M$ i $N$. Z obvodových úhlů nad tětivou $MN$ téže kružnice tak máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$




Obr. 2

**3.** *Najděte nejmenší kladné číslo $x$, pro něž platí: Jsou-li $a$, $b$, $c$, $d$ libovolná kladná čísla, jejichž součin je 1, potom*

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

*(Pavel Novotný)*

**Řešení.** Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou libovolná kladná čísla, jejichž součin se rovná 1. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel $a^x$, $b^x$, $c^x$ pro libovolné $x > 0$ máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Volbou $x = 3$ dostáváme nerovnost $\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) \geqq 1/d$. Analogicky platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3 + b^3 + d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/a.$$

Sečtením uvedených čtyř nerovností dostaneme

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

takže pro $x = 3$ nerovnost ze zadání úlohy vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hledanou nejmenší hodnotou, tedy že pro každé kladné $x < 3$ daná nerovnost pro některou z uvažovaných čtveřic $(a, b, c, d)$ neplatí. Najdeme takovou čtveřici ve tvaru $a = b = c = t$ a $d = 1/t^3$ pro vhodné $t > 1$ (závislé na daném $x < 3$). Pro taková kladná $a$, $b$, $c$, $d$ jistě platí $abcd = 1$,

$$a^x + b^x + c^x + d^x = 3t^x + \frac{1}{t^{3x}} < 4t^x \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{t} + t^3 > t^3.$$

Bude-li proto navíc platit $4t^x < t^3$, nebude nerovnost ze zadání úlohy splněna. S ohledem na podmínku $x < 3$ je nerovnost $4t^x < t^3$ ekvivalentní s nerovností

$$t > 4^{\frac{1}{3-x}},$$

která je pro dostatečně velké $t$ skutečně splněna.

*Závěr.* Hledané nejmenší kladné číslo je $x = 3$.

*Poznámka.* Požadovanou vlastnost má nejen $x = 3$, ale každé $x \geqq 3$ (a rovněž každé $x \leqq -1$). Vysvětlíme to tak, že jedničky ve jmenovatelích zlomků na pravé straně uvažované nerovnosti zaměníme výrazem $(abcd)^{\frac{x+1}{4}}$; dostaneme tak homogenní nerovnost

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq a^{\frac{x-3}{4}}(bcd)^{\frac{x+1}{4}} + b^{\frac{x-3}{4}}(acd)^{\frac{x+1}{4}} + c^{\frac{x-3}{4}}(abd)^{\frac{x+1}{4}} + d^{\frac{x-3}{4}}(abc)^{\frac{x+1}{4}},$$

což je Muirheadova nerovnost pro čtveřice exponentů

$$(x, 0, 0, 0) \quad \text{a} \quad \Big(\frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x+1}{4}, \frac{x-3}{4}\Big),$$

jejíž uplatnění je v případě $x > 0$ vázáno jedinou podmínkou $\frac{x-3}{4} \geqq 0$ neboli $x \geqq 3$ (zatímco v případě $x < 0$ vychází jediná podmínka $\frac{x+1}{4} \leqq 0$ neboli $x \leqq -1$).

---

**4.** *Zkoumejme, pro která přirozená čísla $n$ existují právě čtyři přirozená čísla $k$ taková, že číslo $n + k$ je dělitelem čísla $n + k^2$.*

*a) Ukažte, že vyhovuje $n = 58$, a najděte příslušná čtyři $k$.*

*b) Dokažte, že sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje, právě když $p$ i $2p + 1$ jsou prvočísla.*

*(Nulu mezi přirozená čísla nepočítáme.)* *(Jaromír Šimša)*

**Řešení.** Z rovnosti $n + k^2 = (k + n)(k - n) + n(n + 1)$ vidíme, že $n + k \mid n + k^2$ platí, právě když $n + k \mid n(n + 1)$. Počet čísel $k$ s touto vlastností je tedy rovný počtu těch dělitelů čísla $D = n(n + 1)$, které jsou větší než $n$.

a) V případě $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele příslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že dělitelé čísla $D$, jež jsou větší než 58, jsou právě čtyři: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To jsou hodnoty $58 + k$, takže příslušná hledaná $k$ jsou o 58 menší, jsou to tudíž postupně čísla $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$. (Dodejme, že obě čísla $k = 1$ a $k = n^2$ splňují podmínku $n + k \mid n + k^2$ pro každé $n$.)

b) Pro sudé $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p + 1)$, takže snadno vypíšeme čtyři dělitele čísla $D$, které jsou větší než dané $n = 2p$:

$$2p + 1 < 2(2p + 1) < p(2p + 1) < 2p(2p + 1). \tag{1}$$

Jsou-li obě čísla $p$, $2p+1$ prvočísla, žádné jiné takové dělitele číslo $D$ zřejmě nemá, tudíž číslo $n = 2p$ má požadovanou vlastnost.

Je-li naopak aspoň jedno z čísel $p$, $2p + 1$ složené a platí-li předpoklad $p \geqq 3$ ze zadání úlohy, ukážeme, že příslušné $D$ pak má kromě dělitelů vypsaných v (1) ještě aspoň jednoho dalšího dělitele většího než $2p$. Rozlišíme přitom dva případy podle toho, které z čísel $p$, $2p + 1$ je složené.

(i) Je-li složené číslo $p$, je toto číslo dělitelné některým $q$, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$, a číslo $D$ má pak dělitele $2q(2p + 1)$, který s výjimkou případu $q = \frac{1}{2}p$ leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p + 1) < 2q(2p + 1) < p(2p + 1).$$

Nemá-li však číslo $p$ jiného netriviálního dělitele kromě $q = \frac{1}{2}p$, platí nutně $p = 4$. Tehdy ani druhé číslo $2p + 1 = 9$ není prvočíslo, takže pátého dělitele čísla $D$ (většího než $2p$) najdeme v části (ii).

(ii) Je-li složené (liché) číslo $2p + 1$, je toto číslo dělitelné některým $q$, $3 \leqq q < p$, a číslo $D$ má pak dělitele $2pq$, který leží mezi druhým a třetím dělitelem vypsaným v (1):

$$2(2p + 1) < 2pq < p(2p + 1), \quad \text{neboť} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \ \text{ a } \ q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalence z části b) úlohy je tak dokázána.

**Jiné řešení** části b). Označme $D = 2p(2p + 1)$. Protože $2p < \sqrt{D} < 2p + 1$, má $D$ právě čtyři dělitele větší než $2p$, právě když má zároveň právě čtyři dělitele menší než $\sqrt{D}$, celkem tedy právě osm dělitelů. Číslo $D$ má aspoň dva prvočinitele, takže je buď součinem tří různých prvočísel (to zřejmě nastane, právě když $p$ a $2p + 1$ jsou prvočísla), nebo tvaru $q^3r$, kde $q$, $r$ jsou různá prvočísla. Druhý případ však nemůže nastat, protože $D = 2p(2p + 1)$ je sudé, má lichého dělitele $2p + 1$ a ještě dělitele $p$ nesoudělného s $2p + 1$, muselo by proto být $p = 2^2$, odkud $r = 2p + 1 = 9$, což ovšem není prvočíslo. Tím je požadovaná ekvivalence v části b) dokázána.

---

**5.** *V každém z vrcholů pravidelného $n$-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu $A_k$ je to právě $k$ mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která $n$ lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné $k$, $1 \leqq k \leqq n$, bude ve vrcholu $A_k$ ležet $n + 1 - k$ mincí.* *(Radek Horenský)*

**Řešení.** Přiřaďme každé minci index $i$ vrcholu $A_i$, na kterém leží (tedy číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$) a po každém přemístění dvojice mincí čísla přiřazená mincím aktualizujme. Sledujme nejprve, jak se změní součet $S$ všech $n$ čísel přiřazených jednotlivým mincím po jednom přemístění.

Nepřemisťujeme-li žádnou z obou mincí mezi vrcholy $A_1$ a $A_n$, součet $S$ se nezmění, protože jedno z čísel mincí se o 1 zmenší, druhé se o 1 zvětší (a ostatní se nezmění). Stejně tak se součet $S$ zřejmě nezmění, přemístíme-li jednu minci z $A_1$ do $A_n$ a současně druhou z $A_n$ do $A_1$. Přemístíme-li jednu minci z $A_1$ do $A_n$ a druhou z $A_i$ do $A_{i+1}$ (kde $1 \leqq i \leqq n - 1$), součet $S$ vzroste o $(n - 1) + 1 = n$. Konečně přemístíme-li jednu minci z $A_n$ do $A_1$ a druhou z $A_i$ do $A_{i-1}$ (kde $2 \leqq i \leqq n$), součet $S$ klesne o $n$. Z uvedeného úplného rozboru plyne, že *zbytek součtu $S$ po dělení číslem $n$ se nikdy nezmění.*

Součet $S$ ve výchozí pozici má hodnotu

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1),$$

zatímco v kýžené cílové pozici by měl mít hodnotu

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(n + 1 - k) &= (n + 1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \\ &= \frac{1}{2}n(n + 1)^2 - \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)\end{aligned}$$

(využili jsme známé vzorce pro součet prvých a druhých mocnin čísel prvních $n$ přirozených čísel). Aby bylo možné zamýšleného cíle dosáhnout, musí dvě určené hodnoty $S$

dávat po dělení číslem $n$ stejný zbytek, neboli jejich rozdíl $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ musí být násobkem čísla $n$. Číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ proto musí být celé. Dosazením všech jednotlivých zbytků 0 až 5 modulo 6 snadno zjistíme, že nalezená podmínka je splněna, právě když číslo $n$ dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5. V další části řešení ukážeme, že pro všechna taková $n$ lze skutečně kýžené cílové pozice dosáhnout.

Popíšeme jeden z možných postupů. (Jedinou) minci, která je na počátku ve vrcholu $A_1$, označme $M$. Všechny mince s výjimkou $M$ budeme neustále přemisťovat ve stejném společném směru. V opačném směru se tedy bude přemísťovat jediná mince $M$, aniž bychom se o její pozici nějak průběžně „starali“. Její konečnou polohu určíme pomocí dříve odvozené vlastnosti součtu $S$: index $i$ vrcholu $A_i$, ve kterém se mince $M$ nakonec ocitne, je jednoznačně určen tím, že konečná hodnota součtu $S$ dává po dělení číslem $n$ stejný zbytek jako hodnota výchozí — indexy všech vrcholů totiž tvoří úplnou soustavu zbytků modulo $n$.

Navrženým postupem permanentního přemisťování mince $M$ můžeme kteroukoliv ze zbylých mincí (nezávisle na ostatních zbylých mincích) přemístit do libovolného vrcholu, který si zamaneme. Po konečném počtu vhodných přemístění tedy zřejmě dosáhneme toho, aby všechny mince různé od $M$ byly v každém vrcholu $A_i$ s indexem $i > 1$ v počtu, jaký nám předepisuje zadání úkolu, tedy $n+1-i$. Je celkem lhostejno, že je to právě $n+1-i$, důležité však je, že celkové počty mincí ve výchozí pozici i kýžené cílové pozici jsou zřejmě stejné, takže po zmíněném „zajištění“ vrcholů $A_2, A_3, \ldots, A_n$ mincemi různými od $M$ bude zbylých $n-1$ mincí různých od $M$ ve vrcholu $A_1$ a poslední mince $M$ se ocitne v některém, prozatím nezjištěném vrcholu. Kdy to bude vrchol $A_1$, a tudíž cíle bude dosaženo? Právě tehdy, když počet vrcholů $n$ bude takový, že součet $S$ pro výchozí pozici dává při dělení $n$ stejný zbytek jako součet pro cílovou pozici, o kterou přemisťováním usilujeme. A všechna taková $n$ jsme již našli.

*Odpověď.* Požadovaného cíle je možné dosáhnout, právě když číslo $n$ dává po dělení šesti zbytek 1 nebo 5.

*Poznámka.* Popsaný způsob řešení vede k následujícímu závěru: Jsou-li dána dvě rozmístění stejného počtu mincí ve vrcholech $n$-úhelníku, pak jedno z nich lze převést na druhé popsaným přemisťováním mincí, právě když oba součty $S$, které odpovídají těmto rozmístěním, dávají po dělení číslem $n$ stejný zbytek.

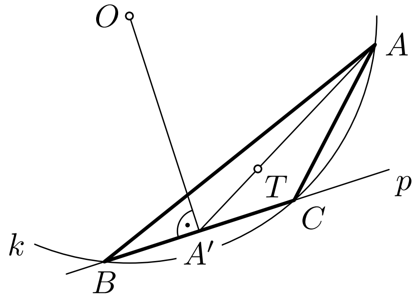
---

**6.** *V rovině $\omega$ jsou dány dva různé body $O$ a $T$. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině $\omega$ a mají těžiště v bodě $T$ a střed opsané kružnice v bodě $O$.* *(Jaromír Šimša)*

**Řešení.** Vezměme nějaký bod $A$ z roviny $\omega$. Aby mohl být vrcholem trojúhelníku popsaného v zadání, musí být různý od bodů $O$ a $T$. Nejprve popíšeme obecnou konstrukci trojúhelníku $ABC$, v němž jsou dány vrchol $A$, střed $O$ opsané kružnice a těžiště $T$ (pro trojici navzájem různých bodů $A$, $O$, $T$). Teprve pak zjistíme, pro které body $A$ takový trojúhelník sestrojit nelze.

Označme $A'$ střed strany $BC$. Bod $A'$ je obrazem bodu $A$ ve stejnolehlosti se středem $T$ a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pokud $A' \neq O$, leží body $B$ a $C$ na kolmici $p$ vedené bodem $A'$ k přímce $OA'$ a zároveň na opsané kružnici $k$ se středem $O$ a poloměrem $|OA|$ (obr. 3).

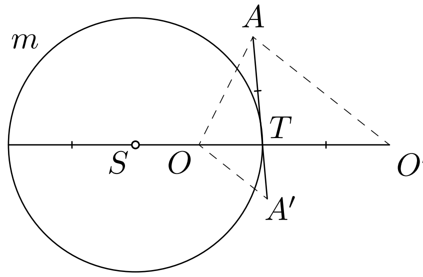
K danému bodu $A$ dokážeme vždy sestrojit jeho obraz $A'$ v uvedené stejnolehlosti. Předpokládejme nejprve, že $A' \neq O$. Abychom dostali dva různé body $B$ a $C$, musí být přímka $p$ sečnou kružnice $k$. To nastane, právě když $|OA'| < |OA|$. Označme $O'$ obraz bodu $O$ ve stejnolehlosti se středem $T$ a koeficientem $-2$. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, proto konstrukční podmínku můžeme zapsat ve tvaru $|O'A| < 2|OA|$. Bod $A$ proto musí ležet



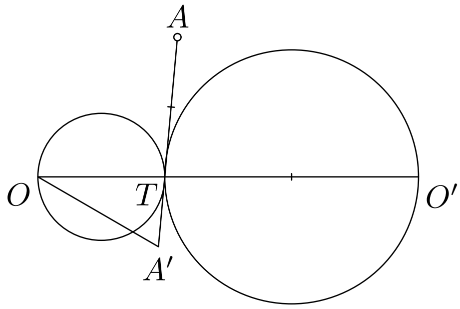

Obr. 3

mimo kruh určený Apollóniovou kružnicí[1] $m(S; |ST|)$, kde $S$ je bod souměrně sdružený s bodem $T$ podle bodu $O$ (obr. 4).

Pokud tedy $A' \neq O$ neboli $A \neq O'$, dostaneme konstrukcí tři body $A$, $B$, $C$. Ty budou vrcholy vyhovujícího trojúhelníku, pokud neleží v přímce. Na přímce leží, když je přímka $BC$ totožná s přímkou $AT$, tj. když přímka $OA'$ je kolmá na $AT$. Bod $A'$ proto nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $OT$ a (po „zobrazení“ této podmínky ve stejnolehlosti se středem $T$ a koeficientem $-2$) bod $A$ nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$ (obr. 5).

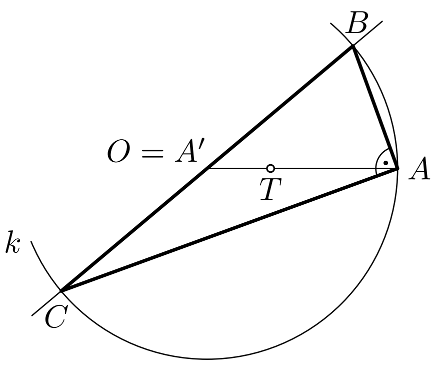



Obr. 4

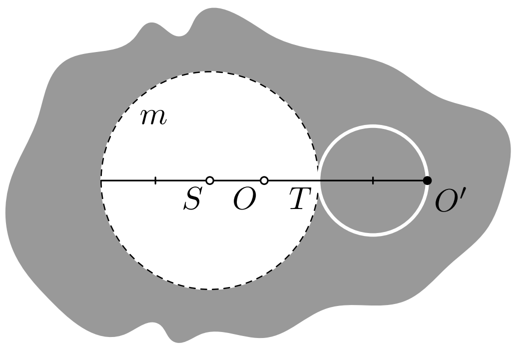



Obr. 5

V případě, že bod $A$ je totožný s bodem $O'$, tj. $A' = O$, namísto kolmice $p$ můžeme vzít libovolnou přímku (různou od $AT$) procházející bodem $O$ (obr. 6). Dostaneme tak nekonečně mnoho různých trojúhelníků $ABC$ s pravým úhlem při vrcholu $A$, které splňují všechny podmínky zadání.




Obr. 6




Obr. 7

*Závěr.* Hledanou množinou bodů je vnější oblast kružnice $m$ kromě bodů ležících na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$, přičemž bod $O'$ do hledané množiny též patří (obr. 7).

[1] Pro dané dva různé body $P$, $Q$ a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnice množina bodů $X$, pro něž platí $|PX| = k|QX|$. Střed Apollóniovy kružnice leží na přímce $PQ$ stejně jako dva body kružnice, které dovedeme pro dané $k$ jednoduše sestrojit.