Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 58. ročníku MO v Plzni

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

po následující dva dny čekají vás, posledně jmenované, hodiny nesnadného přemýšlení o matematických problémech. Atmosféru napínavého hledání dílčích poznatků, které by mohly vést k vytčenému cíli, doprovázenou pocity objevitelského nadšení z dílčích hypotéz, střídaného často trpkým poznáním, že to byly pouhé domněnky, vám nyní přiblížím velice osobním vyprávěním o jednom příběhu s doposud otevřeným koncem.

Loni v červnu v anglicky psané knize *Secrets in Inequalities* vietnamského autora *Pham Kim Hunga* (vydanou rumunským nakladatelstvím Gil Publishing House v roce 2007) jsem objevil následující úlohu samotného autora knihy:

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}}+\sqrt{\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}}+\sqrt{\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}}\le 1. \tag{1}$$

Autorské řešení podané v knize je velmi náročné: nejprve je pro součet tří hodnot konkávní funkce $f(x)=\sqrt{x}$ využita Jensenova nerovnost s rafinovaně vybranými váhovými koeficienty, po následném dvojím užití AG-nerovnosti je úloha zredukována na důkaz takové nerovnosti

$$\begin{aligned}9\bigl(a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\bigr)+3abc(a+b+c)\le&\\ \le 4\bigl(a^4+b^4+c^4\bigr)+17\bigl(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\bigr).&\end{aligned}$$

I to je však nesnadný úkol řešený v knize tak, že získaná symetrická nerovnost je nejprve upravena do tvaru se součtem tří analogických sčítanců

$$\sum_{\text{cykl}}\left(2a^2+2b^2+\frac{3c^2}{2}-5ab\right)(a-b)^2\ge 0.$$

Další úvahy o znaménkách tří velkých závorek a porovnávání jejich absolutních hodnot založená na předpokladu $a\ge b\ge c$ zde nebudu uvádět, nemá to pro další děj příběhu význam.

Nad takovým postupem jsem si jen povzdechl, že tohle bych sám asi nikdy nevymyslel. Nepropadl jsem však trudnomyslnosti, protože vím, jak podobné příklady často autoři vytvářejí, totiž opačným postupem od metody důkazu k zadání. S chladnější hlavou a kritičností jsem si položil otázku, proč vůbec kompetentní autor zapletl do zadání úlohy odmocniny, když díky známé Cauchyově nerovnosti

$$\bigl(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\bigr)^2\le 3(u+v+w)$$

mohl dokazovat tvarově jednodušší, a přitom silnější výsledek

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}\le\frac{1}{3}. \tag{2}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Možné vysvětlení bylo dvojí: buďto nerovnost (2) pro některé trojice kladných a, b, c neplatí, nebo autor nebyl schopen obecně platnou nerovnost (2) dokázat (po listování celou zmíněnou knihou bych téměř vyloučil, že její autor na nerovnost (2) nepomyslel). Že by v případě druhé možnosti byl důkaz jednodušší nerovnosti (2) ještě obtížnější než důkaz složitější nerovnosti (1)?

Poslední otázka způsobila, že jsem měl o letních prázdninách o ušlechtilou zábavu vystaráno. Dny, kdy jsem ve chvílích volna usilovně přemýšlel, jak na důkaz (2) navléct všemožné obvyklé postupy a klasické nerovnosti, se střídaly s dny, kdy jsem na počítači zkusmo hledal nějakou trojici čísel (a, b, c), pro kterou by nerovnost (2) neplatila. Neúspěchy jednoho druhu snažení posilovaly následné snažení druhého druhu, a tak se to pravidelně opakovalo. Už mě to celé dost iritovalo, zejména ta konkrétní čtyřka ve jmenovatelích zlomků, že jsem pomýšlel, přiznám docela netakticky, i na obecnější nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2+b^2+pc^2}+\frac{bc}{pb^2+c^2+pa^2}+\frac{ca}{pc^2+a^2+pb^2}\le\frac{3}{2p+1} \tag{3}$$

s nezáporným parametrem p, v níž je zlomek na pravé straně upraven tak, aby po dosazení $a = b = c$ přešla nerovnost v rovnost (pro záporná p nemůžeme kvůli jmenovatelům na obecnou platnost (3) pomýšlet). Slabou útěchou mi bylo, že takovou nerovnost umím dokázat v jednom konkrétním případě $p = 1$, kdy zlomky nalevo mají stejný jmenovatel, takže je mohu snadno sečíst a dostat tak jednoduchou nerovnost

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le 1,$$

o které je dobře známo, že skutečně platí. Na druhou stranu, po dosazení do (3) krajního přípustného $p = 0$ dostaneme nerovnost, která platí rovněž obecně, ovšem naopak:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3.$$

Proto má také smysl se ptát, zda pro některá (aspoň malá) kladná p neplatí obecně opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2+b^2+pc^2}+\frac{bc}{pb^2+c^2+pa^2}+\frac{ca}{pc^2+a^2+pb^2}\ge\frac{3}{2p+1}. \tag{4}$$

V listopadu jsem si vzpomněl, že můj přítel, pan docent Jaroslav Hora ze Západočeské univerzity v Plzni, je expertem na programy počítačové algebry, a že některé z nich jsou schopny dokazovat polynomické nerovnosti, zdůrazňuji *symbolicky dokazovat*, nikoliv pouze *numericky testovat.* Tak jsem mu napsal, zda by dostupnými prostředky nerovnosti (3) a (4) počítačově nezpracoval. Jako dnes si pamatuji na 27. listopad, kdy mi kolega Hora poslal email, že nerovnost (3) pro původní parametr $p = 4$ skutečně platí, jak mu ohlásil počítač po asi 20 minutách výpočtů. Nejprve v programu Mathematica 6.1 upravil nerovnost (3) s obecným p na ekvivalentní nerovnost $M(a, b, c, p) \ge 0$ s mnohočlenem

$$M(a,b,c,p) = -a^2b^3c - a^3bc^2 + 3a^2b^2c^2 - ab^2c^3 - a^5bp + 3a^4b^2p - a^3b^3p + 3a^2b^4p -$$
$$- a^4bcp - a^3b^2cp - 2a^2b^3cp - ab^4cp - b^5cp + 3a^4c^2p - 2a^3bc^2p - ab^3c^2p + 3b^4c^2p -$$

$-a^3c^3p-a^2bc^3p-2ab^2c^3p-b^3c^3p+3a^2c^4p-abc^4p+3b^2c^4p-ac^5p+3a^6p^2-2a^5bp^2+$
$+3a^4b^2p^2-3a^3b^3p^2+3a^2b^4p^2-ab^5p^2+3b^6p^2-a^5cp^2-2a^4bcp^2-3a^3b^2cp^2-a^2b^3cp^2-$
$-2ab^4cp^2-2b^5cp^2+3a^4c^2p^2-a^3bc^2p^2+9a^2b^2c^2p^2-3ab^3c^2p^2+3b^4c^2p^2-3a^3c^3p^2-$
$-3a^2bc^3p^2-ab^2c^3p^2-3b^3c^3p^2+3a^2c^4p^2-2abc^4p^2+3b^2c^4p^2-2ac^5p^2-bc^5p^2+3c^6p^2+$
$+3a^4b^2p^3-2a^3b^3p^3+3a^2b^4p^3-2ab^5p^3-2a^5cp^3-2a^3b^2cp^3-2a^2b^3cp^3+3a^4c^2p^3-$
$-2a^3bc^2p^3+6a^2b^2c^2p^3-2ab^3c^2p^3+3b^4c^2p^3-2a^3c^3p^3-2a^2bc^3p^3-2ab^2c^3p^3-$
$-2b^3c^3p^3+3a^2c^4p^3+3b^2c^4p^3-2bc^5p^3,$

pak do počítače vložil úkol pro p rovné čtyřem

Reduce[ForAll[$\{a,b,c\}, a>0$&&$b>0$&&$c>0, M[a,b,c,4]>=0], \{a,b,c\}$,Reals]

a po zmíněném čase dostal kladnou lakonickou odpověď „True“.

Ještě ten den mě napadlo, že bych mohl o nerovnosti (3) za 4 měsíce tady v Plzni povídat. Než promluvím o dalších počítačových experimentech, které pro mne kolega Hora udělal později, prozradím, že své osobní marné pokusy a první prohru v důkazovém souboji s počítačem jsem nebral tragicky. Naopak poměrně sebevědomě jsem usoudil, že nic snadného ke zdolání nerovnosti (3) jsem snad nepřehlédl, a tak jsem ji v prosinci, jak s hodnotou $p=4$, tak s obecným p, rozeslal současným i minulým českým reprezentantům na MMO i starším kolegům – úlohářům z Čech, Moravy, Slovenska i Polska. Do dnešního dne se nikdo z nich neozval, že by vyřešil problém alespoň pro p rovné čtyřem.

Jaké ovoce přinesly další týdny komunikace s kolegou Horou? Předně poznání, že opačná nerovnost

$$\frac{ab}{pa^2+b^2+pc^2}+\frac{bc}{pb^2+c^2+pa^2}+\frac{ca}{pc^2+a^2+pb^2}\geq\frac{3}{2p+1}, \tag{4}$$

(splněná jak víme pro $p=0$) nebude platit s obecnými kladnými a, b, c pro žádné kladné p. Při zadání najít protipříklad pro p rovné 10^{-5}

FindInstance[$a>0$&&$b>0$&&$c>0$&&$M[a,b,c,1/100000]>0, \{a,b,c\}$,Reals]

dostal kolega Hora z počítače odpověď $\{a\to 1/32768, b\to 1/2, c\to 1\}$. Po podobném testování ještě menších kladných p pochopil, že bude moci nechat $b=1/2$, $c=1$ a dohledávat k danému malému p vhodné malé a. Proto zaútočil obecně s úkolem

Reduce[ForAll[$p, p>0$,Exists[$a, a>0, M[a,1/2,1,p]>0$]]]

a podle očekávání dostal kladnou odpověď.

Po takové cenné kolegově nápovědě už nebylo obtížné vysvětlit bez užití počítače, jak je to s nerovností (4). Kdyby platila s určitým kladným p pro všechny trojice kladných a, b, c, musela by ze spojitosti platit i pro trojici $(0,1/2,1)$. Pro ni však po dosazení dostáváme nerovnost

$$0+\frac{2}{p+4}+0\geq\frac{3}{2p+1},$$

která neplatí pro žádné $p<10$. Všimnul jsem si, že ještě ničivější dopad má užití trojice $(0,1,1)$, pro niž vyjde nerovnost

$$0+\frac{1}{p+1}+0\geq\frac{3}{2p+1},$$

jež dokonce neplatí pro žádné kladné p. Tím je naděje na obecnou platnost nerovnosti (4) pro nějaké kladné p definitivně zmařena.

Daleko překvapivější a dodnes nezavršený vývoj událostí se rozvinul kolem nerovnosti (3). Jak už víme, s hodnotou $p = 4$ stála na začátku našeho příběhu a 27.11. byla dokázána na počítači s programem Mathematica. Ten pracoval s nerovností o třech proměnných $M(a,b,c,4) \geq 0$, kde

$M(a,b,c,4) = 48(a^6+b^6+c^6) - 36(a^5b+b^5c+c^5a) - 144(a^5c+b^5a+c^5b) + 252(a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2) - 36(a^4bc + b^4ca + c^4ab) - 180(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) - 180(a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b) - 153(a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2) + 531a^2b^2c^2$.

K dalším pokusům mi kolega Hora především napsal, že jeho počítač nezvládl vyřešit podobný úkol pro čtyři proměnné, tj. vypočítat všechny hodnoty p dané zadáním

Reduce[ForAll[$\{a,b,c\}$, $a > 0$&&$b > 0$&&$c > 0$&&$p > 0$&&$M[a,b,c,p] >= 0$, p,Reals],

Takový úkol stroj po určité době vzdal. Co ten jeho počítač utáhl, ocituji z přítelovy zprávy: *Pokud mu dám konkrétní hodnotu parametru p, dostanu po několika desítkách minut odpověď, zda je mnohočlen M nezáporný pro všechna kladná a, b, c či nikoliv. Projel jsem několik přirozených čísel. Vyšlo mi, že hypotéza platí pro* $p = 1,2,3,4,5,6$, *neplatí pro* $p = 7,8,9,\ldots,20,30,50,100$. *Pro* $p = 7$ *to vyvrací* $a = 5/2$, $b = 1/3$, $c = 1$. *Tak jsem zkoušel ještě p mezi šesti a sedmi. Platí to pro* $13/2$ *a* $33/5$, *ne však pro* $20/3$. *Pak jsem ještě zkoušel p v pravém okolí nuly. Vyhovují* $1/2$, $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$ *i* $1/9$, *ne však již* $1/10$. *Pro ni to vyvrací protipříklad* $a = 3/4$, $b = 3/4$, $c = 1$.

Jistě pochopíte, jaké vzrušení ve mně taková nečekaná zpráva vyvolala a jaký závěr se z poskytnutých informací nabízí. Zdá se, že vyhovující hodnoty parametru p vytvoří jeden interval s hranicemi přibližně 0,1 a 6,6. Tato hypotéza mě přivedla k nápadu, zda by se bez počítače nedala vyloučit obecná platnost nerovnosti (3), když je p hodně malé nebo hodně velké, nějak podobně jednoduše, jako byla vyloučena všechna kladná p u opačné nerovnosti (4). Tak jsem vsadil na trojice tvaru $(a,b,c) = (0,t,1)$, kde kladné t hledám v závislosti na daném p, aby po dosazení platila opačná nerovnost

$$0 + \frac{t}{pt^2+1} + 0 > \frac{3}{2p+1}.$$

Existencí takového t bude obecná platnost nerovnosti (3) pro dané p vyvrácena. Každý z přítomných (myslím soutěžících) by rychle zjistil, že vyhovující t nalezneme jenom pro ta kladná p, která splňují jednu z nerovností

$$p < \frac{8-3\sqrt{7}}{2} \doteq 0{,}03 \quad \text{nebo} \quad p > \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \doteq 7{,}97.$$

Přestože takové meze jsou dost hrubší, než naznačovaly počítačové výsledky, jejich jednoduché odvození mě v první chvíli docela uspokojilo; brzy se však dostavila touha po vylepšení.

Pomohla mi šťastná náhoda. V přítelově zprávě bylo uvedeno, že hodnotu $p = 0{,}1$ vylučuje trojice $(3/4, 3/4, 1)$, na které mě zaujala rovnost $a = b$. Proto jsem začal zjišťovat, pro které další hodnoty p vyloučím obecnou platnost nerovnosti (3) jen pomocí trojic $(t, t, 1)$ s vhodným kladným t. Po dosazení takové trojice vyjdou na levé straně

$$\frac{t^2}{pt^2 + t^2 + p} + \frac{t}{pt^2 + 1 + pt^2} + \frac{t}{p + t^2 + pt^2} \leq \frac{3}{2p + 1}$$

dva krajní zlomky se stejným jmenovatelem, což podstatně zjednodušuje situaci. Když si navíc uvědomíme, že pro $t = 1$ musíme dostat rovnost, dojdeme nakonec k ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{(t-1)^2((4p^2 + 4p)t^2 - t(2p^2 - 3p + 1) + 3p)}{(2pt^2 + 1)((p + 1)t^2 + p)(2p + 1)} \geq 0.$$

Hodnota p tudíž bude vyloučena, pokud pro ni najdeme takové t, které poslední nerovnosti nehoví, tedy kladné t s vlastností

$$(4p^2 + 4p)t^2 - t(2p^2 - 3p + 1) + 3p < 0.$$

Není obtížné ukázat, že takto vyloučíme interval všech malých hodnot p s horní hranicí p_0:

$$0 < p < p_0 = 5 - 2\sqrt{6} \doteq 0{,}101\,020\,514.$$

Protipříkladem všem takovým p je trojice $(t_0, t_0, 1)$ s číslem

$$t_0 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \doteq 0{,}844\,948\,974.$$

Výsledek mě nadchl o to více, že nalezená iracionální mez p_0 leží mezi zlomky $1/10$ a $1/9$, kam přesnou dolní hranici vyhovujících p umísťovaly přítelovy experimenty. Proto jsem ho požádal, aby hodnotu p_0 otestoval úkolem

Reduce[ForAll[$\{a, b, c\}, a > 0$&&$b > 0$&&$c > 0, M[a, b, c, 5-2*$Sqrt[6]] >= 0], $\{a, b, c\}$, Reals]

Ocituji část jeho odpovědi: *Především Ti gratuluji k nalezení meze $p_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. Pokoušel jsem ji ověřit strojově přímo, výpočetní doba je ale neúnosná. Dnes jsem měl v práci počítač puštěný přes noc a když ještě ani v poledne nebyl výpočtům konec, tak jsem to vzdal. Tak jsi porazil stroj K.O., aspoň co se týče programu Mathematica. Zdá se mi, že problém je v tom, že symbolické výpočty s odmocninami holt jsou krajně nepříjemné. Tak jsem tu Tvou hranici testoval racionálními čísly p ležícími blízko p_0, posílám to v příloze. Ještě se pokusím asi jinak.*

Zmíněné testy racionálních p dopadly dobře, uvedu jen ta dvě nejbližší testovaná přiblížení: jako vyhovující byla shledána hodnota 0,101 03 větší než p_0, naopak jako nevyhovující hodnota 0,101 020 5 menší než p_0. A tak jsem mohl vychutnávat pocit vítězství nad počítačem, možná jsem to měl i nějak oslavit, byla však na to příliš krátká doba: od 3. března 14:43 do 4. března 11:36. To jsem právě dostal z Plzně zprávu, že hodnota p_0 není vyhovující, ať ji i já sám otestuji na trojici čísel

$$a = \frac{433}{512} \doteq 0{,}845703, \; b = \frac{27}{32} \doteq 0{,}843750, \; c = 1.$$

S hořkostí jsem ten snadný úkol vyplnil, přítel měl samozřejmě pravdu. Naplnil poslední větu předchozího citátu, zadal svému počítači úkol

FindInstance[$a>0$&&$b>0$&&$c>0$&&$M[a,b,c,5-2*$Sqrt[6]]$<0,\{a,b,c\}$,Reals]

a jeho splnění ve tvaru uvedené trojice přineslo odvetné K.O. druhé straně. Marná sláva, přesná dolní mez vyhovujících p, číslo nepatrně větší než $5-2\sqrt{6}$, je opět neznámá hodnota. Povzdechl jsem si jen, jak blízko je ta trojice $(a,b,1)$ blízko trojici se shodnými složkami a, b, kterou jsem dříve tak šťastně našel a v jejíž rozhodující roli jsem tolik věřil. Tak to prostě při práci v matematice chodí, radosti střídají zklamání. Musím být příteli vděčný, že ve své důslednosti nepolevil a nezanechal mě žíti v bludu déle. Chtěl bych proto kolegu Horovi za jeho veškerou jeho dosavadní nezištnou pomoc ve formě počítačových pokusů vyslovit veřejné poděkování a protože je dnes tady s námi, rád bych vám ho představil.

Vážení přítomní, děkuji vám za pozornost, se kterou jste sledovali mé vyprávění. Nebylo by správné, kdybych se ještě nezmínil o jedné významné události. Dne 19. února mi můj student Mgr. Miloš Přinosil oznámil, že z Internetu stáhnul dokument *Collected Problems About Inequalities* pětice autorů *Vo Quoc Ba Can, Nguyen Van Thach, Nguyen Phi Hung, Phan Hong Son, Vo Thanh Van.* Kromě anglického názvu je celý dokument ve vietnamštině a je v něm dokázáno 174 od prvního pohledu velice zajímavých a obtížných nerovností. Mgr. Přinosil si povšimnul úlohy 8 s tímto zadáním:

8. *Chung minh rang voi moi so thuc a, b, c, ta co*

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}\le\frac{1}{3}.$$

Ano, je to přesně ta nerovnost, která mě v loni červnu nad knihou jiného vietnamského autora napadla a o které jsem vám dnes povídal! Jak vypadá její vietnamsky komentovaný důkaz bez užití počítače i prostředků vyšší matematiky, co všechno jsem při jeho luštění prožil a proč se mi zatím nedaří rozšířit jeho působnost na hodnoty parametru p různé od čísla 4, je námětem na celou poučnou přednášku, kterou bych rád v budoucnu proslovil na nějakém soustředění řešitelů matematické olympiády. Snad tam budu mít stejně pozorné posluchače, jako jsem je měl dnes ve vás.

Na úplný závěr svého vystoupení chci jménem Ústřední komise MO srdečně pogratulovat všem přítomným soutěžícím k postupu do nejvyššího kola letošního ročníku olympiády a popřát jim do obou soutěžních dopolední co nejvíce dobrých nápadů a štěstí. Prohlašuji ústřední kolo 58. ročníku MO za zahájené.