3. Středoevropská matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Třetí středoevropská matematická olympiáda (Midle European Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila 24.9.-29.9. 2009 v polském městě Poznaň za účasti 59 studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska.

České družstvo tvořili Petr Boroš a Simona Domesová z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, Radek Marciňa z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze, Miroslav Olšák z Gymnázia Buďánka v Praze, Petr Ryšavý z Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze a Bohuslav Zmek z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Vedoucím družstva byl dr. Martin Panák z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. Pavel Calábek z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Vlastní soutěž probíhala v prostorách Fakulty matematiky a informatiky University Adama Mickiewicze, a to ve dvou dnech: v sobotu 26.září byla na programu soutěž jednotlivců, v neděli 27.září se pak konala soutěž družstev. V soutěži jednotlivců řešili žáci v průběhu pěti hodin čtyři úlohy, v týmové soutěži pak každé národní družstvo mělo stejný čas na řešení osmi úloh. Příklady do soutěže vybírala z návrhů jednotlivých účastnických států mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých národních delegací.

V pondělí po soutěži studenti navštívili lanové centrum a mnohým z nich zůstane tato atrakce nesmazatelně vryta do paměti. Po této fyzicky náročnější aktivitě následovalo večer slavnostní zakončení soutěže, které proběhlo v historické budově univerzity v centru Poznaně.

Absolutním vítězem mezi jednotlivci se stal maďarský student Bertalan Bodor, který jako jediný vyřešil všechny čtyři úlohy. V týmové soutěži pak dominovalo družstvo Polska. Česká výprava byla úspěšná, Bohuslav Zmek získal stříbrnou medaili, zbylí členové družstva až na Petra Boroše pak vybojovali medaili bronzovou. V soutěži družstev obsadil český tým pěkné páté místo.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohy**					**Medaile**
		1	**2**	**3**	**4**	$\sum$	
1.	Bertalan Bodor	6	8	8	8	**30**	**G**
2.-3.	Fabian Gundlach	8	3	8	1	**20**	**G**
2.-3.	Szymon Kubicius	8	3	8	1	**20**	**G**
⋮							
8.–12.	Bohuslav Zmek	5	1	8	1	**15**	**S**
27.–35.	Simona Domesová	0	0	8	1	**9**	**B**
27.–35.	Miroslav Olšák	0	0	8	1	**9**	**B**
27.–35.	Petr Ryšavý	0	0	8	1	**9**	**B**
36.–39.	Radek Marciňa	0	0	8	0	**8**	**B**
52.–55.	Petr Boroš	0	0	0	1	**1**	**-**

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, výsledky národních družstev v týmové soutěži pak z tabulky následující.

Pořadí	**Jméno**	**Body za úlohu číslo**								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$\sum$
1.	Polsko	8	6	8	8	8	8	6	8	**50**
2.	Maďarsko	6	5	8	8	8	4	8	8	**55**
3.	Německo	8	4	8	8	8	8	0	8	**52**
4.	Chorvatsko	8	5	8	5	8	2	8	8	**52**
5.	Česká republika	8	6	8	8	8	3	1	0	**42**
6.	Slovinsko	8	2	8	0	8	0	2	8	**36**
7.–8.	Slovensko	7	3	8	6	8	0	1	1	**34**
7.–8.	Rakousko	8	3	4	3	2	0	8	6	**34**
9.	Švýcarsko	0	2	4	8	8	0	0	8	**30**
10.	Litva	8	2	4	0	5	0	1	4	**24**

Mnohé další informace o průběhu této olympiády lze najít na webové stránce www.memo-2009.wml.amu.edu.pl. Na závěr přikládáme zadání všech úloh obou částí olympiády.

Soutěž jednotlivců

Příklad 1. *Najděte všechny funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

pro libovolná reálná x, y. *(*$\mathbb{R}$ *značí množinu reálných čísel.)*

Příklad 2. *Mějme* $n \geq 3$ *různých barev. Nechť* $f(n)$ *je největší přirozené číslo s následující vlastností: každou stranu a každou úhlopříčku konvexního* $f(n)$*-úhelníka můžeme obarvit jednou z* n *barev tak, že*

- *jsme použili minimálně dvě barvy,*
- *každé tři vrcholy daného mnohoúhelníka určují tři úsečky buď stejné barvy nebo navzájem různých barev.*

Dokažte, že $f(n) \leq (n-1)^2$ *a že rovnost v této nerovnosti nastává v nekonečně mnoha případech.*

Příklad 3. *Nechť* $ABCD$ *je konvexní čtyřúhelník se shodnými stranami* AB *a* CD*, které nejsou rovnoběžné. Označme* E, F *středy úhlopříček* AC *a* BD. *Přímka* EF *protíná úsečky* AB *a* CD *po řadě v bodech* G *a* H. *Ukažte, že* $|\angle AGH| = |\angle DHG|$.

Příklad 4. *Určete všechna přirozená* $k \geq 2$ *taková, že pro žádnou dvojici* (m, n) *různých kladných celých čísel, nepřevyšujících* k, *<u>není</u> číslo* $n^{n-1} - m^{m-1}$ *dělitelné číslem* k.

Týmová soutěž

Příklad 1.

Nechť reálná čísla x, y, z *splňují podmínku* $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. *Dokažte, že*

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27,$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Příklad 2. *Nechť* a, b, c *jsou reálná čísla taková, že pro každé dvě z rovnic*

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje právě jedno reálné číslo, které je řešením obou. Určete všechny možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$.

Příklad 3. *Na tabuli jsou napsána čísla* $0, 1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 2)$. *V každém kroku vymažeme číslo, které je aritmetickým průměrem dvou různých čísel, která ještě na tabuli zůstala. Tyto kroky opakujeme tak dlouho, dokud už žádné další číslo na tabuli nemůžeme smazat. Buď* $g(n)$ *nejmenší možný počet čísel, která na tabuli mohou zůstat. Pro každé* n *určete* $g(n)$.

Příklad 4. *Každé políčko hrací desky* 2009×2009 *obarvíme jednou z* n *barev (nemusíme použít každou z nich). Barvu nazveme* souvislou, *jestliže existuje buď jediné políčko dané barvy, nebo libovolná dvě políčka jsou vzájemně dosažitelná posloupností tahů šachové dámy takových, že se při nich dáma může zastavit pouze na políčkách dané barvy (šachová dáma se po hrací desce může pohybovat vertikálně, horizontálně a diagonálně). Určete největší* n *takové, že pro libovolné obarvení bude alespoň jedna barva použitá na hrací desce souvislá.*

Příklad 5. *Nechť* $ABCD$ *je rovnoběžník, kde* $|\angle BAD| = 60°$ *a označme* E *průsečík jeho úhlopříček. Kružnice opsaná trojúhelníku* ACD *protíná přímku* BA *v bodě* $K \neq A$, *přímku* BD *v bodě* $P \neq D$ *a přímku* BC *v bodě* $L \neq C$. *Přímka* EP *protíná kružnici opsanou trojúhelníku* CEL *v bodech* E *a* M. *Dokažte, že trojúhelníky* KLM *a* CAP *jsou shodné.*

Příklad 6. *Nechť* $ABCD$ *je tětivový čtyřúhelník a* $|CD| = |DA|$. *Body* E *a* F *leží po řadě na úsečkách* AB *a* BC, *navíc* $|\angle ADC| = 2|\angle EDF|$. *Úsečka* DK *je výškou a* DM *těžnicí trojúhelníka* DEF. *Nechť* L *je obraz bodu* K *ve středové souměrnosti podle bodu* M. *Dokažte, že přímky* DM *a* BL *jsou rovnoběžné.*

Příklad 7. *Nalezněte všechny dvojice* (m, n) *celých čísel, které splňují rovnici*

$$(m + n)^4 = m^2 n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

Příklad 8. *Najděte všechna řešení rovnice*

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

v množině nezáporných celých čísel.