4. Středoevropská matematická olympiáda

Martin Panák, MU Brno

Čtvrtá středoevropská matematická olympiáda (Midle European Mathematical Olympiad, zkráceně MEMO) se uskutečnila 9.9.-15.9. 2010 v obci Strečno na Slovensku za účasti šedesáti studentů z deseti zemí středoevropského regionu, jmenovitě z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska. Soutěž je určená pro studenty středních škol, kteří se v daném kalendářním roce neúčastnili mezinárodní matematické olympiády (IMO) a díky svému věku ještě stále mají šanci se zúčastnit IMO v roce příštím. Výjimku tvoří slovinští účastníci, kteří vzhedem k relativně malému počtu obyvatel země nejsou limitovaní předchozí účastí na IMO.

České družstvo tvořili Michael Bílý z Gymnázia Klatovy, Martin Bucháček z Gymnázia Luďka Pika v Plzni, Filip Hlásek z Gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí, Martin Töpfer z Gymnázia Nad Štolou v Praze, Jakub Solovský z Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci a Lukáš Zavřel z Gymnázia Praha 9 na Chodovické. Vedoucím družstva byl dr. Martin Panák z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, jeho zástupcem pak dr. Pavel Calábek z Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity v Olomouci.

Všechny týmy byly ubytovány ve školicím středisku Slovenských drah, kde se odehrávala i část vlastní soutěže. Olympiáda probíhala podle již zavedeného modelu. První den po příjezdu vybírala jury složená z vedoucích národních delegací příklady pro soutěž, zatímco soutěžící navštívili hrad Strečno. Druhý den byla na pořadu soutěž jednotlivců, která proběhla v přednáškové místnosti zmíněného střediska, kde měli studenti pět hodin času na řešení čtyř úloh. Týmová soutěž proběhla pak další den, tj. v neděli, v prostorách Žilinské univerzity. V týmové soutěži má každé národní družstvo k dispozici jednu místnost, kde pak společně řeší po dobu pěti hodit osm úloh. Již v sobotu večer započala koordinace oprav úloh (úlohy jsou opraveny jednak vedoucími národních týmů a nezávisle i týmem opravovatelů zajištěným organizátory; při koordinaci se výsledky oprav porovnají a případné neshody se vyřeší) a pokračovala i během neděle. V pondělí dopoledne se jury domluvila na rozdělení medailí, které se řídí podobnými pravidly jako na mezinárodní matematické olympiádě. Odpoledne pak následovala společná plavba s řešiteli na pltích po řece Váh. V úterý byl program olympiády zakončen výletem do krásné přírody Malé Fatry a slavnostním zakončením, kterého se zúčastnila mimo jiné významné hosty i rektorka Žilinské univerzity Tatiana Čorejová (ministr školství se na poslední chvíli omluvil).

Výsledky českého družstva byly následující: Jakub Solovský a Filip Hlásek získali bronzové medaile (Jakubovi chyběl pouze jeden bod ke stříbrné medaili), Martin Bucháček, Martin Töpfer a Lukáš Zavřel pak získali čestné uznání za jeden bezchybně vyřešený příklad. V týmové soutěži snad lze za úspěch považovat to, že jsme porazili slovenské družstvo.

Pořadí	Jméno		Body za úlohy					Medaile
			1	**2**	**3**	**4**	$\sum$	
1.	Kende Kalina	HUN	1	8	8	8	**25**	G
2.	Nóra Frankl	HUN	0	8	8	8	**24**	G
3.	Nik Jazbinšek	SVN	5	1	8	8	**22**	G
⋮								
16. – 22.	Jakub Solovský		0	0	8	8	**16**	B
29. – 30.	Filip Hlásek		4	0	0	8	**12**	B
40. – 49.	Martin Bucháček		0	0	0	8	**8**	H.M.
	Martin Töpfer		0	0	0	8	**8**	H.M.
	Lukáš Zavřel		0	0	0	8	**8**	H.M.
52. – 54.	Michael Bílý		2	1	0	3	**6**	

Detailní výsledky českých studentů včetně bodových zisků za jednotlivé úlohy lze vyčíst z předchozí tabulky, výsledky národních družstev v týmové soutěži pak z tabulky následující.

Pořadí	Jméno	Body za úlohu číslo								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$\sum$
1.	Maďarsko	8	0	8	4	8	8	8	8	**52**
2.	Polsko	1	2	8	8	8	0	8	8	**43**
3.	Německo	7	2	1	3	8	8	8	3	**40**
4.	Rakousko	2	8	1	3	8	6	8	1	**37**
5.	Chorvatsko	6	0	8	3	8	0	8	2	**35**
6.	Litva	1	2	0	3	8	8	8	0	**36**
7.	Slovinsko	6	0	7	2	8	0	3	1	**27**
8.	Česko	1	2	3	3	8	0	8	1	**26**
9.	Slovensko	2	0	3	4	8	0	5	0	**22**
10.	Švýcarsko	0	0	1	2	0	1	0	0	**4**

Mnohé další informace o průběhu této olympiády lze najít na webové stránce www.memo2010.skmo.sk. Na závěr přikládáme zadání všech úloh obou částí olympiády.

Soutěž jednotlivců

Příklad 1. *Určete všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takové, že pro všechna* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

Příklad 2. *Na tabuli jsou napsáni všichni kladní dělitelé kladného celého čísla* N*. Dva hráči* A *a* B *hrají hru, při které se střídají na tazích. V prvním tahu hráč* A *smaže číslo* N*. Bylo-li naposled smazáno číslo* d*, v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla* d*. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla* N*, pro která hráč* A *může vyhrát nezávisle na tazích hráče* B*.*

Příklad 3. *Je dán tětivový čtyřúhelník* $ABCD$ *a bod* E *na jeho úhlopříčce* AC *takový, že* $|AD| = |AE|$ *a* $|CB| = |CE|$*. Nechť* M *je středem kružnice* k *opsané trojúhelníku* BDE*. Kružnice* k *protíná přímku* AC *v bodech* E *a* F*. Dokažte, že přímky* FM*,* AD *a* BC *procházejí týmž bodem.*

Příklad 4. *Nalezněte všechna kladná celá čísla* n*, která vyhovují následujícím dvěma podmínkám:*

(i) *číslo* n *má alespoň čtyři různé kladné dělitele,*

(ii) *pro libovolné dva dělitele* a*,* b *čísla* n *takové, že* $1 < a < b < n$*, dělí jejich rozdíl* $b - a$ *číslo* n*.*

Týmová soutěž

Příklad 1. *Jsou dány tři rostoucí posloupnosti*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

kladných celých čísel. Každé kladné celé číslo je členem právě jedné z těchto tří posloupností. Dále pro každé kladné celé číslo n *platí:*

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$,

(ii) $a_{n+1} > b_n$,

(iii) *číslo* $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ *je dělitelné dvěma.*

Určete čísla a_{2010}*,* b_{2010} *a* c_{2010}*.*

Příklad 2. *Pro každé celé číslo* $n \geq 2$ *určete největší reálnou konstantu* C_n *takovou, že pro všechna kladná reálná čísla* $a_1, \ldots, a_n$ *platí*

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

Příklad 3. *V každém vrcholu pravidelného n-úhelníku stojí pevnost. Ve stejný okamžik každá pevnost vystřelí na jednu ze dvou nejbližších pevností a zasáhne ji.* Výsledkem střelby *rozumíme množinu zasažených pevností, přičemž nerozlišujeme, zda pevnost byla zasažena jednou nebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všech možných výsledků střelby. Ukažte, že pro všechna celá čísla $k \geq 3$ jsou čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesoudělná.*

Příklad 4. *Nechť n je kladné celé číslo. Čtverec $ABCD$ je rozdělen na n^2 jednotkových čtverců. Každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou rovnoběžnou s BD na dva trojúhelníky. Některé z vrcholů jednotkových čtverců jsou obarveny červeně tak, že každý z $2n^2$ získaných trojúhelníků má alespoň jeden vrchol červený. Určete nejmenší možný počet červených vrcholů takového obarvení.*

Příklad 5. *Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech D, E, F. Nechť bod K je souměrně sdružený s bodem D podle středu kružnice vepsané a přímky DE, FK se protínají v bodě S. Dokažte, že přímky AS a BC jsou rovnoběžné.*

Příklad 6. *Jsou dány body A, B, C, D, E tak, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník. Dále se úhlopříčky AC, BD protínají v bodě S a polopřímky AB, DC v bodě F. Dokažte, že $|\angle AFS| = |\angle ECD|$.*

Příklad 7. *Nechť n je nezáporné celé číslo. Označme a_n číslo s desítkovým zápisem*

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Ukažte, že $a_n/3$ lze vyjádřit jako součet dvou třetích mocnin kladných celých čísel ale nikoliv jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Příklad 8. *Je dáno kladné celé číslo n, které není celou mocninou čísla 2. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m s následujícími dvěma vlastnostmi:*

(i) číslo m je součinem dvou po sobě jdoucích kladných celých čísel,

(ii) desítkový zápis čísla m je tvořen dvěma shodnými bloky n číslic.