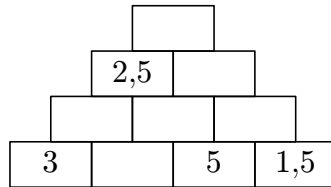


## Komentáře k domácímu kolu kategorie Z6

1. Sněhurka připravuje svých 7 trpaslíků na přijímací zkoušky na SŠPT (Střední škola pro trpaslíky). V prvním cvičném diktátě udělali trpaslíci průměrně 35 chyb. Ve druhém udělal Štístko o 15 chyb méně než v prvním, Dřímál se zhoršil o 13 a Šmudla o 2 chyby. Kejchal se zlepšil o 9 a Prófa dokonce o 19 chyb. Zbylí dva trpaslíci udělali ve druhém diktátě stejný počet chyb jako v prvním. Kolik průměrně udělali trpaslíci chyb ve druhém diktátě?

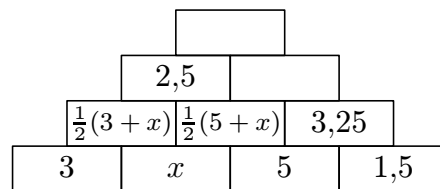
ŘEŠENÍ. Označme  $x$  počet všech chyb všech trpaslíků dohromady. Štístko udělal ve druhém diktátě o 15 chyb méně (všech chyb by bylo  $x - 15$ ), Dřímál se zhoršil o 13 ( $x - 15 + 13$ ), Šmudla měl o 2 chyby víc ( $x - 15 + 13 + 2$ ), Kejchal se zlepšil o 9 ( $x - 15 + 13 + 2 - 9$ ) a Prófa o 19 chyb ( $x - 15 + 13 + 2 - 9 - 19$ ). Ve druhém diktátě bylo  $x - 28$  chyb, tj. o 28 chyb méně než v prvním diktátě. Tedy každý trpaslík udělal ve druhém diktátě průměrně o 4 chyby méně. Ve druhém diktátu udělal každý trpaslík průměrně 31 chyb.

2. Doplň do obrázku chybějící čísla tak, aby byl na každé cihličce (kromě těch v nejspodnější vrstvě) napsaný aritmetický průměr čísel ze dvou cihliček pod ní umístěných.



ŘEŠENÍ. Žáci budou úlohu experimentem a úvahou: např. bude-li chybějící číslo v dolní řadě 5, vyšlo by (ve 2. řadě shora) místo 2,5 číslo 4,5. Zvolíme tedy menší číslo např. 3 atd.

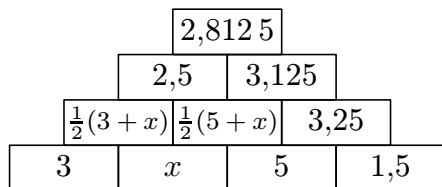
2. ŘEŠENÍ. Označme chybějící číslo ve spodní řadě jako  $x$ . Podle zadání pak můžeme pyramidu doplnit do tvaru



průměrem čísel  $\frac{3+x}{2}$  a  $\frac{5+x}{2}$  dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3+x}{2} + \frac{5+x}{2} \right) = 2,5.$$

Odtud plyne, že  $x = 1$  a další doplnění pyramidy je už snadné. Výsledná pyramida je tvaru

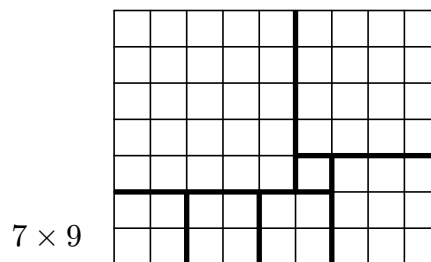
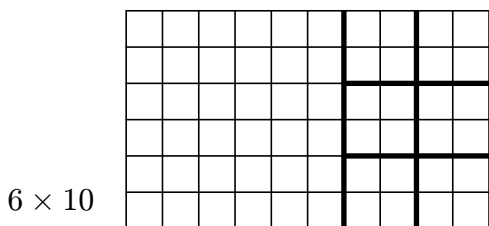
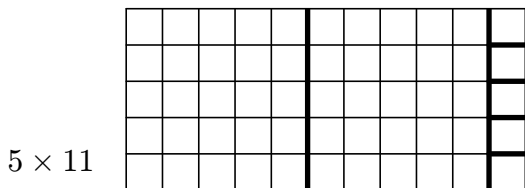
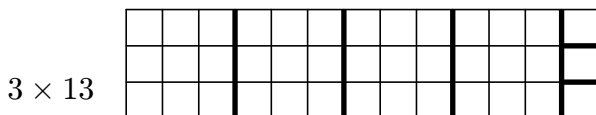
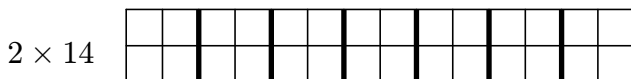


3. Boris sestavil ze 32 zápalek obdélník (nikoliv čtverec). Jeho sestra vložila do obdélníku několik zápalek a tak ho rozdělila přesně na 7 čtverců. Kolik zápalek mohly měřit strany Borisova obdélníku? Všechny zápalky byly stejně dlouhé a žádnou nelámali.

ŘEŠENÍ. Rozměry všech obdélníků, které se dají postavit z 32 zápalek jsou:

$$1 \times 15, 2 \times 14, 3 \times 13, 4 \times 12, 5 \times 11, 6 \times 10 \text{ a } 7 \times 9.$$

Na sedm čtverců se dají rozdělit tyto (uvádíme vždy jen jedno rozdělení).



4. Od té doby, co si Novákovi koupili štěňátka Puntů a Alíka, chodili každý den na jednu procházku. Někdy s sebou vzali Puntů, někdy Alíka, ale nikdy oba pejsky zároveň. Na osmnácti procházkách s sebou nějakého pejska měli. Puntů zůstal doma čtrnáctkrát, Alík šestnáctkrát. Jak dlouho mají Novákovi Puntů a Alíka?

ŘEŠENÍ 1. Děti mohou opět řešit úlohu experimentováním.

ŘEŠENÍ 2. Novákovi musí mít psy alespoň 18 dní, neboť na 18 procházkách nějakého psa měli. Označme  $p$  počet dní, kdy byl na procházce Punťa, a  $a$  počet dní, kdy byl na procházce Alík. Ze zadání vyplývá, že  $a + p = 18$ . Protože Punťa zůstal doma 14krát, počet dní, kdy byl doma spolu a Alíkem, je  $14 - a$ . Alík zůstal doma 16krát, počet dní, kdy byl doma spolu s Punťou, je  $16 - p$ . Odtud plyne rovnost  $14 - a = 16 - p$ . Řešení dokončíme pomocí tabulky

$p$	4	5	6	7	8	9	10	11
$a$	14	13	12	11	10	9	8	7
$14 - a$	0	1	2	3	4	5	6	7
$16 - p$	12	11	10	9	8	7	6	5

Z tabulky vidíme, že 6krát byli oba psy doma a víme, že 18krát byl některý z nich na procházce, tj. Novákovi mají psi 24 dní.

5. *Finále podzimní soutěže o nejkrásnějšího draka se zúčastnili Adam, Barča a Zuzka. Každý z 22 porotců přidělil finalistům 1, 2 nebo 3 body — každému jiný počet. Tři body získal soutěžící za první místo, 2 body za druhé místo a 1 bod za třetí místo. Adam získal stejně prvních a třetích míst. Druhých míst měl o čtyři více než prvních. Barča a Zuzka získaly stejně prvních míst, avšak druhých míst měla Barča dvakrát více než Zuzka. Kdo vyhrál finále? Kolik získal bodů?*

ŘEŠENÍ. Údaje vyplývající ze zadání zapíšeme do tabulky. Číslo v tabulce znamená počet rozhodčích, kteří přidělili danému soutěžícímu odpovídající počet bodů.

	1 bod	2 body	3 body
Adam	$x$	$x + 4$	$x$
Barča	$p$	$2z$	$y$
Zuzka	$q$	$z$	$y$

Každému soutěžícímu přidělilo body 22 rozhodčích, tj. součet čísel v každé řádce je 22. Odtud je jasné (z rovnice  $3x + 4 = 22$ ), že Adamovi přidělilo 6 rozhodčích 1 bod, 10 rozhodčích 2 body a 6 rozhodčích 3 body. Tabulka má nyní tvar

	1 bod	2 body	3 body
Adam	6	10	6
Barča	$p$	$2z$	$y$
Zuzka	$q$	$z$	$y$

Protože každý rozhodčí přidělil každému soutěžícímu jiný počet bodů, je i součet čísel v každém sloupci 22. Z prostředního sloupce dostaneme, že  $z = 4$ . Z posledního sloupce plyne, že  $y = 8$ . Odtud již snadno dopočítáme, že  $p = 6$  a  $q = 10$ . Výsledná tabulka má tedy tvar

	1 bod	2 body	3 body	součet bodů
Adam	6	10	6	44
Barča	6	8	8	46
Zuzka	10	4	8	42

6. Kuba měl v krabici 100 stejně velkých dřevěných krychliček o hraně 1 dm. Z některých z nich sestavil velkou krychli a pět z jejích stěn obarvil na červeno. Pak tuto krychli zboural a ze všech krychliček, z nichž byla vytvořena, postavil kvádr. I tento kvádr měl právě pět svých stěn obarvených načerveno. Jaké rozměry měla velká krychle a jaké kvádr?

ŘEŠENÍ. Nejprve si uvědomíme, jaké rozměry mohla mít krychle (maximálně  $4 \times 4$ ) a potom kvádr složený ze stejného počtu krychliček.

krychle	$2 \times 2 \times 2$	
kvádr	$1 \times 2 \times 4$	$1 \times 1 \times 8$
krychle	$3 \times 3 \times 3$	
kvádr	$1 \times 1 \times 27$	$1 \times 3 \times 9$

krychle	$4 \times 4 \times 4$					
kvádr	$1 \times 1 \times 64$	$1 \times 2 \times 32$	$1 \times 4 \times 16$	$1 \times 8 \times 8$	$2 \times 2 \times 16$	$2 \times 4 \times 8$

Kdyby měla krychle s rozměry  $2 \times 2 \times 2$  zabarvených 5 stěn na červeno, tak je složena ze 4 krychliček, které mají 3 stěny červené a ze 4 krychliček mající 2 stěny červené. K postavení kvádrů  $1 \times 2 \times 4$  s 5 červenými stranami ale potřebujeme 6 krychliček se 3 obarvenými stěnami. Takový kvádr tedy postavit nelze. Je-li však nenatřená stěna rozměru  $2 \times 4$ , pak potřebujeme k postavení kvádrů právě 4 krychličky a 3 červenými stěnami a 4 se dvěma a dostáváme jedno řešení. Po systematickém vyšetření jednotlivých možností dojdeme k dalšímu řešení. Velká krychle měla rozměry  $4 \times 4 \times 4$  a kvádr  $2 \times 4 \times 8$  (nebarevná stěna bude  $4 \times 8$ ).