# Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 67. ročníku MO v Přerově

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

dovolte mi, abych před zítřejším startem celostátního olympijského zápolení našich středoškoláků v disciplíně zvané matematika přispěl ke slavnostní atmosféře jeho předvečera příspěvkem, který jsem si nachystal, jak vzápětí poznáte, právě pro dnešní den. Snad jeho odlehčeně matematickým obsahem zaujmu a možná i chvílemi pobavím nejen samotné soutěžící a pracovníky MO, ale i ostatní přítomné hosty.

Dnešní datum můžeme zaznamenat osmimístným kódem

$$A = 18032018.$$

Kdybychom si přáli takové kódy jednotlivých dní ukládat do nějaké databáze a mít je při obvyklém čtení zleva doprava uspořádány v chronologickém pořadí, v jakém dny našeho kalendáře po sobě následují, byla by vhodnější konstrukce, která by dnešnímu dni přiřadila kód

$$B = 20180318.$$

Mysle na dnešní den již o posledních Vánocích, položil jsem si otázku, zda by se kolem této dvojice kódů dala vytvořit nějaká matematická zápletka. Rozhodl jsem se proto oba kódy uvážit jako zápisy dvou osmimístných čísel

$$A = 18\,032\,018 \quad \text{a} \quad B = 20\,180\,318$$

(o velikosti přibližně 18 a 20 milionů) a zkoumat, zda nějaká vlastnost tato čísla spojuje nezávisle na jejich tolik provázaném číslicovém zápisu.

Co tedy mají tato dvě čísla společné? Napovědět by mi mohl i žák obecné školy: mají přece společné dělitele! Tak jsem v napjatém očekávání rychle zapnul počítač, abych zjistil, jaké dělitele obě čísla mají. To se pozná podle rozkladů obou čísel součin několika menších čísel, které už dále takto rozložit nejdou a kterým říkáme prvočísla. Jakmile jsem tyto rozklady daných čísel $A$ a $B$, které vám za okamžik promítnu, na displeji spatřil a porovnal, bylo mi jasné, že mám na vystoupení v Přerově tak říkajíc zaděláno:

$$A = 18\,032\,018 = 2\times 31\times 290\,839$$
$$B = 20\,180\,318 = 2\times 19\times 31\times 37\times 463$$

Co mě tak zaujalo a příjemně překvapilo? To, že kromě očekávaného jednoho společného výskytu nejmenšího prvočísla 2 (dnes přece shodou okolností oba kódy končí stejným dvojčíslím 18) se v rozkladu obou čísel $A$ a $B$ objevilo i poměrně velké prvočíslo 31. Je to, jak dále uvidíme, značně kuriózní situace, která umocňuje

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX výjimečnost dnešního dne, vybraného pro zahájení ústředního kola matematické olympiády. Podle podtržených společných prvočinitelů

$$
\begin{aligned}
A &= 18\,032\,018 = \underline{2}\times\underline{31}\times 290\,839\\
B &= 20\,180\,318 = \underline{2}\times 19\times\underline{31}\times 37\times 463
\end{aligned}
$$

docházíme k závěru, že největším společným dělitelem čísel $A$ a $B$ je číslo $2\times 31 = 62$, které budeme dále nazývat *datumovým součinitelem* pro dnešní den, tedy 18. března 2018. Pokud vás přídavné jméno „datumový“ jazykově zatahalo za uši a dali byste přednost přívlastku „datový“, chci na obranu toho prvního poznamenat, že v současné době datových médií, tedy nosičů, jakými jsou různé disky nebo flash paměti, jedno mechanické zařízení je stále v prodeji pod tradičním názvem *datumové razítko*.

Vraťme se ale k naší soutěži. Účastníci z celé České republiky, kteří se dnes do Přerova sjeli, museli v letošním ročníku MO projevit své schopnosti a nejlépe obstát ve dvou předchozích kolech, školním a krajském. Školní kolo proběhlo 12. prosince 2017, tedy dni, který má podle rozkladů čísel

$$
\begin{aligned}
A &= 12\,122\,017 = 811\times 14\,947,\\
B &= 201\,71\,212 = 2\times 2\times 107\times 47\,129
\end{aligned}
$$

nejmenší možný datumový součinitel 1. Významnější krajské kolo se konalo dne 16. ledna 2018, který má patřičně vyšší datumový součinitel 22, jak plyne z rozkladů

$$
\begin{aligned}
A &= 16\,012\,018 = \underline{2}\times\underline{11}\times 389\times 1\,871,\\
B &= 20\,180\,116 = \underline{2}\times 2\times\underline{11}\times 458\,639.
\end{aligned}
$$

I tak je tento součinitel o 40 menší nežli dnes, kdy zahajujeme kolo ústřední. To bylo mé druhé radostné zjištění. K pocitu naprosté euforie mi jen chyběl deficit pouhých pěti jednotek, který se nedostává dnešnímu datumovému součiniteli 62, aby splynul s pořadovým číslem 67 letošního ročníku MO, které je mimochodem samo prvočíslo. Nedalo mi to, a tak jsem se hned pustil do pátrání, zda některý den letošního roku má za datumový součinitel právě číslo 67. Zjistil jsem, že k tomu by rok 2018 musel mít téměř dvojnásobný počet měsíců, totiž 23, i více dnů v jednom měsíci:

$$
\begin{aligned}
A &= 43\,232\,018 = 2\times\underline{67}\times 322\,627,\\
B &= 20\,182\,343 = \underline{67}\times 227\times 1\,327.
\end{aligned}
$$

Ano, jednalo by o den, který bychom kvůli nepojmenovanému měsíci nazvali čtyřicátého třetího dvacátý třetí.

Jako zanícený matematik se snažím nepříznivé situace při svých bádáních jen tak nevzdávat. V daném případě jsem si poměrně rychle uvědomil, že 67. ročník MO probíhá ne v kalendářním roce 2018, nýbrž ve školním roce 2017/2018, a tak jsem stejné pátrání jako pro rok 2018 podnikl i pro celý rok 2017, i když nový školní rok začal až 4. září. Bohužel i tentokrát mi vyšel den, který se vůbec nekonal:

$$A = 46\,622\,017 = 13\times\underline{67}\times 53\,527,$$
$$B = 20\,176\,246 = 2\times 17\times 17\times\underline{67}\times 521.$$

Ano, součinitele 67 bychom se loni dočkali až čtyřicátého šestého šedesátý druhý.

Pro zajímavost chci k tomu ještě dodat, že v našem 21. století jsme už skutečně zažili den, jehož datumový součinitel sice nebyl přímo roven prvočíslu 67, byl však jeho násobkem. Byl to 6. listopad roku 2008:

$$A = 06\,112\,008 = \underline{2}\times 2\times 2\times\underline{3}\times\underline{3}\times 7\times\underline{67}\times 181,$$
$$B = 20\,081\,106 = \underline{2}\times\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{67}\times 16\,651.$$

A ještě jedna historická kuriozita staršího data. Letos na podzim uplyne 225 let od dosud jediného dne našeho gregoriánského kalendáře, kdy datumový součinitel byl přesně roven loňskému letopočtu, tedy prvočíslu 2017:

$$A = 30\,111\,793 = \underline{2\,017}\times 14\,929,$$
$$B = 17\,931\,130 = 2\times 5\times 7\times 127\times\underline{2\,017}.$$

Čtete správně, oním dnem byl 30. listopad roku 1793.

Snad vás teď budou zajímat nějaké obecnější závěry o datumových součinitelích, včetně již oznámené výjimečnosti jejich vyšších hodnot, kterou jsme zatím příklady příliš nepodpořili. Využijme k tomu aktuální měsíc březen 2018. Součinitele připíšeme k jednotlivým dnům za dvojtečku obvykle provedeného kalendáře.

**Březen 2018**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Po | | 5: 1 | 12: 2 | 19: 3 | 26: 2 |
| Út | | 6: 2 | 13: 9 | 20: 2 | 27: 1 |
| St | | 7: 3×7 | 14: 2×7×11 | 21: 7 | 28: 2×3×7 |
| Čt | 1: 3 | 8: 2 | 15: 23 | 22: 2×9 | 29: 1 |
| Pá | 2: 2 | 9: 1 | 16: 2×3 | 23: 1 | 30: 2 |
| So | 3: 11 | 10: 2×3 | 17: 1 | 24: 2 | 31: 9 |
| Ne | 4: 2×9 | 11: 1 | 18: 2×31 | 25: 3×11 | |

Jistě jste každý něco zajímavého vypozoroval, já začnu pěkně od Adama, přesněji od Bedřicha, Anežky a Kamila, kteří mají svátek první tři březnové dny. Ty letos mají součinitele 3, 2 a 11, čtvrtý březen pak číslo 18, které jsem zapsal jako součin 2×9, abych zdůraznil jeho dělitelnost číslem 9 neboli $3^2$. Právě tři uvedená prvočísla 2, 3 a 11 mají v datumových součinitelích pravidelná zastoupení. Nejmenší z nich, prvočíslo 2, jak už jsem se zmínil u dnešního data 18. 3., je totiž letos zastoupeno každý druhý den. Pokud jde o vyšší mocniny dvojky, tak ty vyjdou letos naprázdno. Může za to poslední dvojčíslí 18 letopočtu 2018, které není dělitelné čtyřmi. A v příštím roce 2019 to bude s prvočíslem 2 a jeho mocninami ještě horší, každý datumový součinitel totiž bude lichý. O to lépe pak vynikne skutečnost, že nejčastější hodnotou datumového součinitele je nejmenší možné číslo 1.

Podobně jako u prvočísla 2, vyslovíme nyní každoměsíční zákonitosti, které se týkají prvočísel 3 a 11; prosím, abyste je na zobrazeném kalendáři průběžně kontrolovali: každý třetí den je datumový součinitel dělitelný třemi, každý devátý den devíti a každý jedenáctý den jedenácti. Tato tři právě vyslovená pravidla platí bez ohledu na to, jaký rok a měsíc právě píšeme. Podívejme se, jak je dokázat.

Obecná datumová čísla $A$ a $B$ zapíšeme užitím mocnin desítky jako součty

$$A = 10^6 \cdot D + 10^4 \cdot M + R, \quad B = 10^4 \cdot R + 10^2 \cdot M + D,$$

kde $D$ značí dvojmístné číslo dne, $M$ dvojmístné číslo měsíce a $R$ čtyřmístný letopočet. Zastoupené mocniny desítky dávají při dělení čísly 3, 9 a 11 stejný zbytek 1, jak plyne z jejich vyjádření

$$10^6 = 999\,999 + 1, \quad 10^4 = 9\,999 + 1, \quad 10^2 = 99 + 1$$

a z faktu, že každé číslo zapsané samými devítkami je dělitelné třemi, devíti a — v případě sudého počtu devítek — i jedenácti. Proto obě čísla $A$ a $B$ mají při dělení třemi, devíti i jedenácti vždy stejný zbytek, jaký společně s nimi má i zjednodušený součet

$$S = D + M + R.$$

Takový součet, a tedy i odpovídající datumový součinitel, je tak skutečně dělitelný třemi každý třetí den pevného měsíce a roku, každý jeho devátý den je dělitelný devíti a každý jeho jedenáctý den je dělitelný jedenácti. To jsme slíbili dokázat.

Jistě jste na zobrazeném kalendáři utkvěli pohledem na řádku pro třetí dny každého týdne, tedy pro středy. Všichni středeční součinitelé jsou dělitelní sedmi! To je poznatek, který může svádět k domněnce podobné té o činitelích 3, 9 a 11, že totiž v každém měsíci se datumoví součinitelé dělitelní sedmi vyskytují pravidelně jednou za sedm dní. To však pravda není. Kupříkladu letos se to stane kromě března už pouze v říjnu, a to ve stejné dny 7., 14., 21. a 28. jako v březnu. Tak předně, vlastnost těchto čtyř říjnových dnů plyne bez dlouhých výpočtů z vlastnosti dnů březnových. Vysvětlím to pro poslední z nich, 28. říjen 2018, kdy uplyne 100 let od vzniku Československé republiky. Podívejme se, jak se změní datumová čísla $A$ a $B$, vyměníme-li 3. měsíc březen za 10. měsíc říjen, vybarvěme přitom pouze číslice pro měsíc, protože ostatní číslice se nezmění:

$$28\,{\color{red}03}2\,018 \hookrightarrow 28\,{\color{red}10}2\,018,$$
$$20\,18{\color{red}0}\,{\color{red}3}28 \hookrightarrow 20\,18{\color{red}1}\,{\color{red}0}28.$$

Pokud mi věříte, že obě čísla před šipkami jsou dělitelná sedmi, musíte uznat, že taková jsou i obě čísla za šipkami (uvažte jen podle barvy, o kolik se čísla zvětšila). Pro zajímavost dodám, že 28. říjen 2018 má datumový součinitel rovný číslu 14, pro památný 28. říjen 1918 je to pouhé číslo 6. Pro jiné významné dny z dějin našeho národa jsem datumové součinitele zatím nepočítal.

Zpátky ale k prvočíslu 7. Dlužím ještě vysvětlení, proč v jiných měsících letošního roku nežli v březnu a říjnu datumoví součinitelé dělitelní sedmi neexistují. Zaměníme-li v obecně zapsaných datumových číslech

$$A = 10^6 \cdot D + 10^4 \cdot M + R, \quad B = 10^4 \cdot R + 10^2 \cdot M + D$$

mocniny desítek jejich zbytky při dělení sedmi, dostaneme tentokrát různé součty

$$S_A = D + 4M + R, \quad S_B = 4R + 2M + D.$$

To znamená, že čísla $A$ a $B$ dávají při dělení sedmi obecně vzato různé zbytky, tudíž jsou v daném roce $R$ obě dělitelná sedmi jen v těch měsících $M$, pro něž je rozdíl

$$S_B - S_A = (4R + 2M + D) - (D + 4M + R) = 3R - 2M$$

dělitelný sedmi. Takové měsíce jsou zřejmě v každém roce buď dva (jako letos) a jejich pořadová čísla tvoří jednu z dvojic

$$\{1, 8\}, \ \{2, 9\}, \ \{3, 10\}, \ \{4, 11\}, \ \{5, 12\},$$

(ta letošní jsou vybarvená) nebo je takový měsíc jen jeden, totiž 6. měsíc červen nebo 7. měsíc červenec.

Podobně naprázdno vyjdou v datumových součinitelích většiny měsíců každého roku i všechna další prvočísla 13, 17, 19 a tak dále. Kupříkladu, celý letošek vůbec nevstoupí do naší hry sedmnáctka.

Své vystoupení ukončím přehledem dnů letošního roku, jejichž datumoví součinitelé stojí za pozornost. Jakmile někdo z Vás spatří den svých narozenin, může si zatleskat nebo výsknout.

- 24. ledna 2018: $2 \times 3^3 = 54$
- 1. února 2018: 29
- 26. února 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 14. března 2018: $2 \times 7 \times 11 = 154$
- 15. března 2018: 23
- 18. března 2018: $2 \times 31 = 62$
- 28. března 2018: $2 \times 3 \times 7 = 42$
- 13. dubna 2018: $11 \times 19 = 209$
- 21. dubna 2018: $3^4 = 81$
- 24. dubna 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 22. června 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 18. července 2018: $2 \times 3^3 = 54$
- 20. srpna 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 7. září 2018: $3^2 \times 47 = 423$
- 7. října 2018: $7 \times 11 = 77$
- 18. října 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 13. prosince 2018: $3^2 \times 13 = 117$
- 16. prosince 2018: $2 \times 3 \times 11 = 66$
- 26. prosince 2018: $2 \times 13 = 26$

Vidíme, že letos má nejkurióznější datumový součinitel bezesporu 7. září. Číslo 423 je nejen za celý rok výrazně největší, ale obsahuje ve svém rozkladu i prvočíslo 47, které jediné převyšuje dnešní prvočíslo 31. Považte prosím, že 7. září letos připadne zrovna na ten pátek, kdy budou přítomní soutěžící z nematuritních ročníků trávit poslední večer na týdenním celostátním soustředění MO v Karlově pod Pradědem. Mohou tam ten rekordní datumový součinitel 423 přiměřeně oslavit, třeba posezením u táboráku.

Děkuji vám za pozornost a prohlašuji ústřední kolo 67. ročníku Matematické olympiády za zahájené.